Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 8. Januar 2015

Übungen zur Vorlesung *Teilchen und Felder I*

(WiSe 2014/15, Übungsblatt 11)

`http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingTUF/TUF.html`

Abgabe: Donnerstag, 15. Januar bis 12:00 Uhr

41) **Zum Umgang mit Lorentz-Transformationen**

a) Zeigen Sie, dass zwei aufeinanderfolgende Lorentz-Boosts entlang der x-Achse durch einen einzigen solchen Boost ersetzt werden können. Wie hängt der zugehörige Boostparameter mit den Relativgeschwindigkeiten für die ursprünglichen beiden Transformationen zusammen?

b) Ein System Σ' bewege sich mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v} = v\,(\cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_y)$ relativ zu einem System Σ. Die Achsen beider Systeme sind parallel zueinander, ihre Ursprünge fallen bei $t = t' = 0$ zusammen. Wie lautet die zugehörige Lorentz-Transformationsmatrix? **(2P)**

42) **Zum Nachdenken**

Ein Physikstudent des (vermutlich) ersten Semesters ist arg verwirrt, denn er hat die folgende Überlegung angestellt:

> "Der Radius r einer kreisrunden Scheibe, die in einem Inertialsystem Σ rotiert, ist von der Längenkontraktion nicht betroffen, da die Verbindungslinien vom Scheibenmittelpunkt zum Rand senkrecht auf den momentanen Geschwindigkeitsvektoren stehen. Dagegen sollte sich jedoch für den Rand der Scheibe die Längenkontraktion bemerkbar machen, so dass das Verhältnis vom Umfang der rotierenden Scheibe zu ihrem Radius für einen Beobachter in Σ *kleiner* als 2π sein sollte. Andererseits bleibt der Umriss der Scheibe, eben da sich ja ihr Radius r bei der Rotation nicht ändert, für diesen Beobachter auch weiterhin ein Kreis mit Radius r, so dass das Verhältnis von Umfang zu Radius *doch* 2π sein sollte. Was ist hier los — ist vielleicht π gar nicht eindeutig?"

Helfen Sie Ihrem Kommilitonen, bevor er sein Studium an den Nagel hängt! **(2P)**

43) **Ko- und kontravariante metrische Tensoren**

a) Berechnen Sie den kovarianten metrischen Tensor g_{ij} sowie den kontravarianten metrischen Tensor g^{ij} für einen dreidimensionalen Raum, dessen schiefe kovariante Basis durch

$$\vec{b}_1 = (2,0,0) \quad , \quad \vec{b}_2 = (0,1,2) \quad , \quad \vec{b}_3 = (0,2,2)$$

gegeben wird. Wie lauten dann die kontravarianten Basisvektoren?

b) Betrachten Sie nun den dreidimensionalen Raum mit sphärischen Polarkoordinaten r, ϑ, φ und setzen Sie

$$\vec{b}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \quad , \quad \vec{b}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \quad , \quad \vec{b}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \; .$$

Bestimmen Sie auch hierfür den kovarianten Tensor g_{ij}, sein kontravariantes Gegenstück g^{ij} sowie die kontravarianten Basisvektoren $\vec{b}^i$! **(2P)**

44) **Der vollständig antisymmetrische Einheitstensor vierter Stufe**

Insbesondere für Integrationen im vierdimensionalen Raum ist der vollständig antisymmetrische Tensor $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ von großer Bedeutung. Seine von Null verschiedenen Komponenten sind entweder $+1$ oder -1 und ändern das Vorzeichen bei Vertauschung zweier Indizes; der kontravariante Einheitstensor wird zudem festgelegt durch

$$\varepsilon^{0123} = +1 \; .$$

a) Folgern Sie, dass dann

$$\varepsilon_{0123} = -1 \; .$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = - \begin{vmatrix} \delta^\mu_\alpha & \delta^\nu_\alpha & \delta^\rho_\alpha & \delta^\sigma_\alpha \\ \delta^\mu_\beta & \delta^\nu_\beta & \delta^\rho_\beta & \delta^\sigma_\beta \\ \delta^\mu_\gamma & \delta^\nu_\gamma & \delta^\rho_\gamma & \delta^\sigma_\gamma \\ \delta^\mu_\delta & \delta^\nu_\delta & \delta^\rho_\delta & \delta^\sigma_\delta \end{vmatrix} \; .$$

c) Welche Gestalten besitzen daher die “Verjüngungen” $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\sigma}$, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}$, $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma}$ und schließlich $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$?

d) Zeigen Sie, dass $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ tatsächlich ein “Tensor” ist, sich also unter Lorentz-Transformationen wie ein Tensor vierter Stufe verhält. **(4P)**