

Übungen zur Vorlesung *Teilchen und Felder I*

(WiSe 2014/15, Übungsblatt 10)

<http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingTUF/TUF.html>

Abgabe: Donnerstag, 8. Januar bis 12:00 Uhr

37) Produktregeln für den Nabla-Operator

Es seien $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ und $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$ zwei differenzierbare Vektorfelder. Beweisen Sie die folgenden Produktregeln:

- a) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$
b) $\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$ (1P)

38) Zur Impulserhaltung in einem Plattenkondensator

Ein Plattenkondensator, dessen Platten der Fläche A in den Ebenen $z = \pm d/2$ liegen und die Flächenladungsdichten $\pm\sigma$ tragen, wird von einem homogenen Magnetfeld in x -Richtung durchsetzt. Randfelder werden vernachlässigt.

- a) Welchen Impuls trägt das elektromagnetische Feld zwischen den Platten?
b) Beide Platten werden durch einen Widerstand entlang der z -Achse miteinander verbunden, so dass sich der Kondensator entlädt. Wo bleibt der vorher im Feld gespeicherte Impuls?
c) Das magnetische Feld zwischen den (wieder geladenen) Platten wird langsam ausgeschaltet. Wo bleibt dann der Impuls des elektromagnetischen Feldes? (2P)

39) Energie- und Impulsbilanz in einem Koaxialkabel

Ein in z -Richtung orientiertes Koaxialkabel der Länge ℓ bestehe aus einem inneren zylindrischen Leiter mit Radius a und einem äußeren Leiter mit Radius b ; es sei an einem Ende an eine Batterie und am anderen Ende an einen Widerstand angeschlossen. Der innere Leiter trage die Ladung Q und führe einen Strom I , der äußere Leiter trägt daher die Ladung $-Q$ und führt den entgegengesetzten Strom $-I$.

- a) Berechnen Sie den Poynting-Vektor des Systems und zeigen Sie, dass die Leistung, die längs des Kabels von der Batterie zum Widerstand transportiert wird, der Beziehung $P = UI$ gehorcht, wobei U die Spannung zwischen den Leitern bezeichnet.
b) Wo bleibt der im Feld gespeicherte Impuls, wenn der Strom (z.B. durch Vergrößerung des Widerstandes) langsam ausgeschaltet wird? (3P)

Bemerkung: Es gibt in diesem (abgeschlossenen!) System noch einen “versteckten” Impuls, der mit dem fließenden Strom zusammenhängt und den Feldimpuls genau kompensiert. Daher tritt beim Ausschalten des Stromes tatsächlich *kein* “Rückstoß” auf. Das ist ein *relativistischer* Effekt, der später behandelt werden wird!

40) Zum Maxwellschen Spannungstensor

a) Eine homogen geladene Vollkugel vom Radius R trage die Gesamtladung Q . Ihr Mittelpunkt falle mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammen; außerdem werde sie durch einen Schnitt in der x - y -Ebene in zwei Hälften geteilt. Welche Kraft wirkt dann auf jede der beiden Halbkugeln?

b) Die Größe

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$$

wird als “klassischer Elektronenradius” bezeichnet, wobei m_e die Elektronenmasse und c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Angenommen, das Elektron wäre wirklich eine homogen geladene Kugel mit eben diesem Radius: Mit welcher Kraft stießen sich dann zwei Hälften voneinander ab? (4P)