Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 18. Dezember 2014

Übungen zur Vorlesung *Teilchen und Felder I*

(WiSe 2014/15, Übungsblatt 9)

`http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingTUF/TUF.html`

Abgabe: Donnerstag, 8. Januar bis 12:00 Uhr

33) **Kanonische Invarianz der Poisson-Klammer**

Neben den "alten" Impuls- und Ortskoordinaten (p, q) sei (P, Q) ein "neuer" Satz von Koordinaten, der aus dem alten durch eine invertierbare Transformation hervorgeht: $P_i = P_i(p, q)$, $Q_i = Q_i(p, q)$ für $i = 1, \ldots, f$. Auch für diese neuen Koordinaten sollen die fundamentalen Poisson-Klammern gelten. Zeigen Sie, dass dann die Poisson-Klammer $\{F, G\}$ zweier Phasenraum-Funktionen F, G in den neuen Koordinaten denselben Wert hat wie in den alten! **(2P)**

34) **Wirkungsvariablen für die Bewegung in einem Zentralpotential**

Die Bewegung eines Teilchens der Masse m in dem Zentralpotential

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + \frac{c^2}{2mr^2}$$

wird in ebenen Polarkoordinaten (r, φ) beschrieben durch die Hamilton-Funktion

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + V(r) \; .$$

Da φ zyklisch ist, ist $p_\varphi = \ell$ erhalten; eine zweite Erhaltungsgröße ist die Energie E. Die invarianten 2-Tori im Phasenraum werden also festgelegt durch die Gleichungen $H = E$, $p_\varphi = \ell$. Daher besitzen die beiden Wirkungsvariablen besonders einfache Darstellungen:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\oint p_\varphi \mathrm{d}\varphi \qquad \text{und} \qquad I_2 = \frac{1}{2\pi}\oint p_r \mathrm{d}r \; .$$

a) Drücken Sie I_1 und I_2 durch E und ℓ aus!

b) Mit welchen Frequenzen "umspinnen" die Trajektorien ihren jeweiligen Torus? **(4P)**

35) **Wirkungsvariablen in der "alten" Quantenmechanik**

a) Berechnen Sie die Wirkungsvariable

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint p \mathrm{d}q$$

für ein Teilchen der Masse m in einem eindimensionalen "Kastenpotential" der Breite a bzw. in dem Potential eines harmonischen Oszillators mit der Kreisfrequenz ω. Drücken Sie in beiden Fällen die Energie E des Teilchens durch I aus.

b) Die quantenmechanischen Energieeigenwerte des "Teilchens im Kasten" lauten

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2 \qquad , \qquad n = 1, 2, 3, \dots \; ;$$

die Eigenwerte des harmonischen Oszillators sind

$$E_n = \hbar\omega\,(n + 1/2) \qquad , \qquad n = 0, 1, 2, \dots \; .$$

Vergleichen Sie diese quantenmechanischen Resultate mit den entsprechenden klassischen Funktionen $E(I)$. Was fällt Ihnen auf?

c) Im Bohrschen Atommodell sind für das Elektron im Wasserstoffatom nur solche Kreisbahnen erlaubt, für die der Drehimpuls ein ganzzahliges Vielfaches von $\hbar$ ist:

$$\ell = n\hbar \qquad , \qquad n = 1, 2, 3, \dots \; .$$

Wie hängt diese "Drehimpulsquantelung" mit a) bzw. b) zusammen? **(2P)**

36) **Ein ganz besonderes Pendel**

Betrachten Sie ein Fadenpendel, dessen Faden sich während der Pendelbewegung teilweise an eine "Führungslinie" anschmiegen kann, so dass die Kurve, die der Pendelkörper beschreibt, weitgehend beliebig geformt werden kann.

a) Auf welcher Kurve muss sich der Pendelkörper bewegen, damit die Periodendauer des Pendels unabhängig von der Amplitude wird?

Hinweis: Perfekt harmonische Schwingungen ergeben sich, wenn die potentielle Energie in Abhängigkeit von der vom Pendelkörper zurückgelegten Strecke $s(t)$ wie das Potential eines harmonischen Oszillators aussieht, also für

$$mgy = \frac{1}{2} m\omega^2 s^2 \; .$$

Schließen Sie daraus, dass

$$x = \int_0^y \mathrm{d}y' \, \sqrt{\frac{g}{2\omega^2 y'} - 1}$$

und benutzen Sie die Substitution

$$y = \frac{g}{2\omega^2} \sin^2(\varphi/2) \; ,$$

um eine Parameterdarstellung der gesuchten Kurve zu finden. **(2P)**

b*) Zeigen Sie, dass sich der Pendelkörper auf der benötigten Kurve bewegt, wenn die Führungslinie $(x_\mathrm{F}, y_\mathrm{F})$ die Form einer Zykloide besitzt, d.h. für

$$x_\mathrm{F}(\varphi) = R(\varphi - \sin\varphi) \quad , \quad y_\mathrm{F}(\varphi) = \ell - R(1 - \cos\varphi) \qquad \text{mit } -\pi \le \varphi \le +\pi \; ;$$

dabei gibt ℓ die Fadenlänge an. Wie muss der Parameter R gewählt werden?

c*) Stellen sie schließlich die Lagrange-Funktion des Systems auf und zeigen Sie, dass $s(t)$ tatsächlich eine harmonische Schwingung durchführt. **(+3P)**