Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 11. Dezember 2014

Übungen zur Vorlesung *Teilchen und Felder I*

(WiSe 2014/15, Übungsblatt 8)

`http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingTUF/TUF.html`

Abgabe: Donnerstag, 18. Dezember bis 12:00 Uhr

29) **Stationarität des Wirkungsfunktionals und Hamiltonsche Gleichungen**

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad , \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}$$

unmittelbar aus den Lagrange-Gleichungen zweiter Art folgen. Zeigen Sie nun, dass man diese Hamilton-Gleichungen auch aus der Forderung nach der Stationarität des Wirkungsfunktionals

$$S[p,q] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \, \left(\sum_{j=1}^{f} p_j \dot{q}_j - H(p,q) \right)$$

erhält: Ersetzen Sie p durch $p + \delta p$ und q durch $q + \delta q$, wobei die Variationen δp und δq (wie in der Hamilton-Mechanik üblich) voneinander unabhängig sein sollen und Anfangs- und Endpunkt der Konfigurationsbahn festgehalten werden, $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Berechnen Sie dann die Änderung δS und erläutern Sie den Zusammenhang zwischen der Stationarität des Wirkungsfunktionals und den Hamiltonschen Gleichungen. **(2P)**

30) **Rotierende Bezugssysteme**

Ein Bezugssystem $\widetilde{S}$ rotiere gegenüber einem raumfesten System S mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = |\vec{\omega}|$. Ist nun $\dot{\vec{r}}$ die Geschwindigkeit eines Teilchens in S und $\dot{\vec{R}}$ seine Geschwindigkeit in $\widetilde{S}$, so gilt der Zusammenhang

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{R}} + \vec{\omega} \times \vec{R} \, .$$

a) Geben Sie die Lagrange-Funktion eines "freien" Teilchens in $\widetilde{S}$ an und ermitteln Sie die zugehörige Bewegungsgleichung. Erklären Sie die darin auftretenden Terme!

b) Berechnen Sie auch die Hamilton-Funktion des Teilchens in $\widetilde{S}$ und zeigen Sie, dass die daraus folgenden Hamiltonschen Gleichungen wieder auf die aus a) bekannte Bewegungsgleichung führen. **(2P)**

31) **Zur Forminvarianz der Hamiltonschen Gleichungen**

Bekanntlich führen die Lagrange-Funktionen $L(q, \dot{q}, t)$ und

$$\widetilde{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}g(q,t)}{\mathrm{d}t}$$

auf identische Lagrange-Gleichungen. Zeigen Sie, dass jedoch die zu einer Ortsvariable kanonisch konjugierte Impulsvariable *nicht* eindeutig ist. Stellen Sie dann die zu $\widetilde{L}$ gehörige Hamilton-Funktion $\widetilde{H}$ auf und zeigen Sie, dass auch diese Funktion einem System Hamiltonscher Gleichungen gehorcht, das die kanonische Form besitzt. **(2P)**

32) **Ein Weihnachtsmärchen**

Es ist schon spät am Abend des 24. Dezember und der Weihnachtsmann ist soeben zur Himmelspforte — die selbstverständlich mit dem Ursprung des himmlischen Koordinatensystems zusammenfällt — zurückgekehrt, als er plötzlich erschrocken feststellt, dass er den Besuch eines Hauses, dessen Schornstein sich am Punkt (x_1, y_1) befindet, vergessen hat. (Die Himmelsbewohner rechnen die Ordinate nach unten hin positiv, drehen also im Vergleich zu uns die Richtung der y-Achse um!) Aus der Ruhelage lässt sich der Weihnachtsmann sofort mit seinem Schlitten unter dem Einfluss der (konstanten) Schwerkraft fallen.

a) Auf welcher Kurve muss er fliegen, um den Schornstein in kürzester Zeit zu erreichen?

b) Wie lange dauert dann sein Flug für $x_1 = \pi \cdot 1000\,m$ und $y_1 = 2000\,m$? **(4P)**

Wie in jedem richtigen Märchen, so fallen auch hier einige sehr segensreiche Hinweise vom Himmel: Machen Sie sich zunächst klar, dass die Flugzeit durch das Funktional

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}}\, \mathrm{d}x$$

gegeben wird. Nutzen Sie dann ebenso wie schon in Aufgabe 28 die Tatsache aus, dass die "Lagrange"-Funktion $L(y, y') = \sqrt{(1 + y'^2)/y}$ nicht explizit von der Variablen x abhängt und zeigen Sie, dass

$$y = \frac{1}{c^2(1 + y'^2)}$$

mit einer geeigneten Konstanten c. Machen Sie den Ansatz $y' = -\tan(\varphi/2)$ und leiten Sie damit eine Parameterdarstellung $(x(\varphi), y(\varphi))$ der gesuchten optimalen Kurve her. Können Sie die Form dieser Kurve anschaulich interpretieren?