Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 4. Dezember 2014

Übungen zur Vorlesung *Teilchen und Felder I*

(WiSe 2014/15, Übungsblatt 7)

`http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingTUF/TUF.html`

Abgabe: Donnerstag, 11. Dezember bis 12:00 Uhr

25) **"Autonomisierung" explizit zeitabhängiger Hamiltonscher Systeme**

Explizit zeitabhängige Hamiltonsche Systeme können "autonomisiert", d.h. auf Kosten einer Vergrößerung der Dimension des Phasenraums auf zeitunabhängige Systeme zurückgeführt werden: Ist $H = H(p, q, t)$ eine explizit zeitabhängige Hamilton-Funktion, so kann die Zeitvariable t als Ortskoordinate ("vom Typ q"!) aufgefasst werden, zu der eine kanonisch konjugierte Impulsvariable p_t gehört. Die Rolle der Zeit (als "Flussparameter") wird dann von einer neuen Variablen τ übernommen, und die "erweiterte Hamiltonfunktion"

$$\mathcal{H}(p, p_t, q, t) = p_t + H(p, q, t)$$

liefert genau die von H erzeugte Dynamik. — Erklären Sie diese Aussage! **(2P)**

Hinweis: Betrachten Sie die von $\mathcal{H}$ vermittelten Hamiltonschen Gleichungen für $q(\tau)$, $t(\tau)$, $p(\tau)$ und $p_t(\tau)$! Welche Rolle spielt p_t?

26) **Die Determinante einer "Fast-Einheitsmatrix"**

Im Beweis des Satzes von Liouville wurde in der Vorlesung die folgende Aussage benutzt: Sind M und A jeweils $n \times n$-Matrizen und sind die Elemente von M gegeben durch

$$M_{ij} = \delta_{ij} + \varepsilon A_{ij} \ ,$$

wobei ε ein "kleiner" Parameter ist, so gilt

$$\det M = 1 + \varepsilon \, \mathrm{Spur}\, A + O(\varepsilon^2) \ .$$

Beweisen Sie diesen Zusammenhang! **(1P)**

Hinweis: Wenn man von der bekannten Determinantenformel

$$\det M = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sign}(\pi) M_{1,\pi(1)} M_{2,\pi(2)} \cdot \ldots \cdot M_{n,\pi(n)}$$

ausgeht, wobei π alle Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ (also alle Elemente der symmetrischen Gruppe S_n) durchläuft, so lässt sich die behauptete Gleichung beinahe direkt ablesen. Man braucht daher "eigentlich" keine einzige Zeile zu rechnen!

27) **Zur Stetigkeit von Funktionalen**

Für stetig differenzierbare Funktionen $y(x)$ liefert das Funktional

$$F[y] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \, \sqrt{1 + y'^2(x)}$$

die Bogenlänge ihrer Graphen über dem kompakten Intervall $[x_1, x_2]$. (Warum?) — Zeigen Sie, dass dieses Funktional bzgl. der Norm

$$\|y\|_0 = \max_{x_1 \le x \le x_2} |y(x)|$$

nicht stetig ist, wohl aber bzgl. der Norm

$$\|y\|_1 = \max_{x_1 \le x \le x_2} \Big(|y(x)| + |y'(x)| \Big) \, .$$

Erklären Sie diese Tatsache auch anschaulich! **(3P)**

28) **Die minimale Rotationsfläche**

Lässt man den Graphen einer Funktion $y = y(x)$ um die x-Achse rotieren, so entsteht eine Rotationsfläche. Welche glatte Funktion $y(x)$ liefert bei gegebenen Randwerten $y(x_1) = y_1$ und $y(x_2) = y_2$ die kleinstmögliche Fläche über dem Intervall $[x_1, x_2]$? **(4P)**

Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst, dass die Fläche durch das Funktional

$$F[y] = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \; y\sqrt{1 + y'^2(x)}$$

gegeben wird. Folgern Sie daraus, dass die minimierende Funktion $y(x)$ eine Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial y'} \, y' - L = const.$$

erfüllen muss, wobei $L(y, y') = y\sqrt{1 + y'^2}$. Woran erinnert diese Gleichung?