Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 27. November 2014

Übungen zur Vorlesung *Teilchen und Felder I*

(WiSe 2014/15, Übungsblatt 6)

`http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingTUF/TUF.html`

Abgabe: Donnerstag, 4. Dezember bis 12:00 Uhr

21) **Zur Legendre-Transformation**

a) Berechnen Sie die Legendre-Transformierte $\widehat{f}(\xi)$ der Funktion $f(x) = \frac{1}{\alpha}x^\alpha$, wobei $x \geq 0$ und $\alpha > 1$ vorausgesetzt wird, sowie ihre zweite Transformierte $\widehat{\widehat{f}}(\eta)$.

b) Zeigen Sie, dass $\widehat{\widehat{f}} = f$ für konvexe oder konkave Funktionen f. **(2P)**

22) **Zum Umgang mit Poissonklammern**

a) Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für die Poisson-Klammer von Phasenraumfunktionen F, G, H:

$$\begin{array}{rl}
\text{(i)} & \{F,G\} = -\{G,F\} \\
\text{(ii)} & \{F,G+H\} = \{F,G\} + \{F,H\} \\
\text{(iii)} & \{F,GH\} = G\{F,H\} + \{F,G\}H \\
\text{(iv)} & \{F,\{G,H\}\} + \{G,\{H,F\}\} + \{H,\{F,G\}\} = 0
\end{array}$$

Hinweis: Während die ersten drei Beziehungen beinahe selbstverständlich sind, erfordert der Nachweis der vierten etwas Arbeit. Wenn man hier nur "mechanisch" die Definition der Klammer benutzt, entstehen schnell so viele Terme, dass man den Überblick verlieren könnte. Um das zu vermeiden, könnten Sie z.B. eine geeignete Kurzschreibweise einführen und versuchen, die Beziehung (iv) kombinatorisch zu verstehen, d.h. das Bildungsgesetz für die einzelnen Terme zu erraten.

b) Berechnen Sie die folgenden Poisson-Klammern:

$$\{q_i, q_k\}\ ,\ \{p_i, p_k\}\ ,\ \{p_i, q_k\}\ ,\ \{\ell_i, \ell_k\}\ ,$$

wobei für die letzte dieser Klammern cartesische Koordinaten vorausgesetzt werden sollen. Hier bietet sich die Benutzung von a) an! **(3P)**

23) **Noch einmal: Bewegung im Zentralpotential**

Die Lagrange-Funktion eines Teilchens, das sich in einem Zentralpotential $V(r)$ bewegt, lautet bekanntlich

$$L(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - V(r)\ .$$

a) Bestimmen Sie die entsprechende Hamilton-Funktion und zeigen Sie explizit, dass die zugehörigen Hamiltonschen Bewegungsgleichungen den Lagrange-Gleichungen äquivalent sind.

b) Zeigen Sie, dass die invarianten Mannigfaltigkeiten im Phasenraum die Topologie eines Torus besitzen, sofern das Potential $V(r)$ nur stabile Radialoszillationen zulässt. **(2P)**

24) **Noch einmal: Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld**

Die Lagrange-Funktion eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld, das durch die Potentiale $\vec{A}(\vec{r}, t)$ und $\Phi(\vec{r}, t)$ beschrieben wird, lautet bekanntlich

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - e\Phi(\vec{r}, t) + e\vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}} \,.$$

a) Bestimmen Sie die entsprechende Hamilton-Funktion. (Merken Sie sich das Resultat: Es ist *sehr* wichtig!)

b) Zeigen Sie, dass für ein konstantes Feld $\vec{B}$ der Ausdruck $\vec{A} = \frac{1}{2}\left(\vec{B} \times \vec{r}\right)$ ein geeignetes Vektorpotential liefert. Wie lautet also die Hamilton-Funktion eines Teilchens, das sich in einem konstanten $\vec{B}$-Feld bewegt, das parallel zur z-Achse orientiert ist? Stellen Sie das System der sechs zugehörigen Hamilton-Gleichungen auf und lösen Sie dieses System. Beschreiben Sie die Bahnen des Teilchens! **(3P)**