Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 20. November 2014

Übungen zur Vorlesung *Teilchen und Felder I*

(WiSe 2014/15, Übungsblatt 5)

`http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingTUF/TUF.html`

Abgabe: Donnerstag, 27. November bis 12:00 Uhr

17) **Massenpunkt auf rotierender Kreislinie**

Eine Punktmasse m gleite unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungsfrei auf einer aufrecht stehenden Kreislinie mit dem Radius R, die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um ihre vertikale (Durchmesser-)Achse dreht. Die Position des Teilchens kann also durch den Winkel ϑ angegeben werden, den seine Verbindungslinie zum Kreismittelpunkt mit der negativen z-Achse einschließt.

a) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L(\vartheta, \dot{\vartheta})$ dieses Systems an.

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für $\vartheta(t)$ und ermitteln Sie daraus die Gleichgewichtspositionen: Welche sind (in Abhängigkeit von Ω) stabil, welche instabil?

c) Wie lauten die Frequenzen kleiner Schwingungen um die jeweils stabilen Gleichgewichtslagen? **(3P)**

18) **Der Runge-Lenz-Vektor**

Zeigen Sie: Bewegt sich ein Teilchen der (reduzierten) Masse μ in dem Potential

$$U(r) = -\frac{\kappa}{r} ,$$

so ist der "Runge-Lenz-Vektor"

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{\ell} - \kappa \frac{\vec{r}}{r}$$

eine Erhaltungsgröße. In welche Richtung zeigt dieser Vektor? **(1P)**

19) **Bestimmung der Kepler-Ellipsen aus dem Runge-Lenz-Vektor**

Zeigen Sie, dass man aus der Kenntnis der in Aufgabe 18 eingeführten Erhaltungsgröße $\vec{A}$ die Bahnen für gebundene Bewegungen im Potential $U(r) = -\kappa/r$ finden kann, *ohne* noch eine Differentialgleichung lösen zu müssen! **(2P)**

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass der Betrag von $\vec{A}$ die Exzentrizität der Kepler-Ellipsen bestimmt, und betrachten Sie dann das Skalarprodukt $\vec{A} \cdot \vec{r}$.

20) **Periheldrehung bei Störung des Gravitationspotentials**

Ein Teilchen mit der (reduzierten) Masse μ bewege sich in dem modifizierten Gravitationspotential

$$U_\lambda(r) = -\frac{\kappa}{r} + \frac{\lambda}{r^2} \, .$$

a) Zeigen Sie, dass die schon in der Vorlesung benutzte Größe $s = 1/r$ einer Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\varphi^2} + \omega^2 s = \frac{\kappa\mu}{\ell^2}$$

gehorcht, wobei ℓ wie üblich den Betrag des (Relativ-)Drehimpulses bezeichnet und ω geeignet zu wählen ist. (Fällt Ihnen ein anderes mechanisches System ein, das ebenfalls durch eine solche Gleichung beschrieben wird?)

b) Folgern Sie aus a), dass die Bahnkurven des Teilchens in der Form

$$r(\varphi) = \frac{\alpha}{\beta\cos(\omega\varphi) + 1}$$

geschrieben werden können, und drücken Sie die Konstanten α, β durch die Erhaltungsgrößen E und ℓ aus. Stellen Sie sicher, dass Sie im Grenzfall $\lambda \to 0$ die bekannten Kepler-Bahnen zurückerhalten.

c) Die in b) gefundene Bahn beschreibt für $E < 0$ und $\omega \neq 1$ eine präzedierende Ellipse. Zeigen Sie, dass die bei einem Umlauf auftretende Periheldrehung (d.h. der Präzessionswinkel) durch

$$\Delta\varphi = 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 2\lambda\mu/\ell^2}} \right)$$

gegeben wird. — Die Periheldrehung des Merkur, die durch die allgemeine Relativitätstheorie vorhergesagt wird, beträgt 43" pro Jahrhundert; dabei finden 416 Umläufe statt. Nehmen Sie an, dass diese Periheldrehung auf ein modifiziertes Gravitationspotential $U_\lambda(r)$ zurückgeführt werden kann und vergleichen Sie die dann notwendige Stärke der Modifikation mit der der Drehimpulsbarriere, d.h. bestimmen Sie die dimensionslose Größe $2\lambda\mu/\ell^2$. **(4P)**