Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 13. November 2014

Übungen zur Vorlesung *Teilchen und Felder I*

(WiSe 2014/15, Übungsblatt 4)

`http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingTUF/TUF.html`

Abgabe: Donnerstag, 20. November bis 12:00 Uhr

13) Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

Die Lagrange-Funktion

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^{\,2} - e\Phi(\vec{r}, t) + e\vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}}$$

bestimmt das Verhalten eines Teilchens der Ladung e und Masse m in einem elektromagnetischen Feld, wobei dieses Feld durch das skalare Potential $\Phi(\vec{r}, t)$ und das Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$ beschrieben wird.

Bestätigen Sie diese Aussage, indem Sie zeigen, dass die zugehörige Lagrange-Gleichung zweiter Art mit dem bekannten Kraftgesetz übereinstimmt. Dabei soll der ε-Kalkül *nicht* verwendet werden. **(2P)**

14) Ist die Lagrange-Funktion eindeutig?

a) Eine Lagrange-Funktion besitze die Form einer totalen Zeitableitung,

$$\widetilde{L}(q, \dot{q}, t) = \frac{\mathrm{d}g(q, t)}{\mathrm{d}t}$$

mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion g. Wie üblich ist $q = (q_1, \ldots, q_f)$. Welche Aussage machen dann die Lagrange-Gleichungen zweiter Art?

b) Gegeben sei nun eine beliebige Lagrange-Funktion $L(q, \dot{q}, t)$. Gibt es dann noch weitere Lagrange-Funktionen, die auf dieselben Bewegungsgleichungen führen wie diese Funktion L?

c) Betrachten Sie noch einmal die in Aufgabe 13 eingeführte Lagrange-Funktion eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld: Wie ändert sich die Lagrange-Gleichung zweiter Art, wenn die Potentiale gemäß

$$\vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r}, t) \qquad , \qquad \Phi'(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\chi(\vec{r}, t)$$

mit Hilfe einer Funktion $\chi(\vec{r}, t)$ "umgeeicht" werden? **(2P)**

15) **Trennung von Schwerpunkts- und Relativkoordinaten**

Die Lagrange-Funktion zweier Teilchen mit Massen m_1 und m_2, deren Wechselwirkung durch ein nur von ihrem Abstand abhängiges Potential $U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ vermittelt wird, lautet

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \ .$$

Zeigen Sie, dass unter Verwendung des Relativvektors $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ sowie des Schwerpunktvektors $\vec{R}$ die Lagrange-Funktion die Form

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\vec{r}}^2 + \frac{1}{2}M\dot{\vec{R}}^2 - U(r)$$

erhält, wobei $M = m_1 + m_2$ die Gesamtmasse und

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

die sogenannte "reduzierte Masse" bezeichnet. Kommentieren Sie diesen Befund im Hinblick auf den Lagrange-Formalismus! **(2P)**

16) **Bewegung in einem isotropen Oszillatorpotential**

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in dem dreidimensionalen isotropen harmonischen Potential

$$U(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \ .$$

a) Welche Energie muss das Teilchen mindestens besitzen?

b) Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit $r(t)$ der Radialkoordinate des Teilchens sowie die Polardarstellung $r(\varphi)$ der Bahnkurve.

c) Zeigen Sie, dass die Bahnen des Teilchens in sich geschlossen sind, und charakterisieren Sie die Form der Bahnkurven! **(4P)**