Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 6. November 2014

Übungen zur Vorlesung *Teilchen und Felder I*

(WiSe 2014/15, Übungsblatt 3)

`http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingTUF/TUF.html`

Abgabe: Donnerstag, 13. November bis 12:00 Uhr

9) **Noch einmal: Die Atwoodsche Fallmaschine**

Betrachten Sie noch einmal die bereits in Aufgabe 6 untersuchte Atwoodsche Fallmaschine: Formulieren Sie die Lagrange-Funktion dieses Systems mit Hilfe einer geeigneten generalisierten Koordinate und zeigen Sie, dass die zugehörige Lagrange-Gleichung zweiter Art mit der schon bekannten Bewegungsgleichung übereinstimmt. **(1P)**

10) **Noch einmal: Das Pendel mit beweglicher Aufhängung**

In der Vorlesung wurde ein System aus zwei Massenpunkten betrachtet, die durch eine masselose Stange der Länge ℓ verbunden sind. Dabei wird einer der beiden Massenpunkte reibungsfrei entlang der x-Achse geführt, während der andere in der x-y-Ebene unter dem Einfluss der Schwerkraft schwingen kann.

Formulieren Sie die Lagrange-Funktion dieses Systems mit Hilfe zweier geeigneter generalisierter Koordinaten und zeigen Sie, dass die zugehörigen Lagrange-Gleichungen zweiter Art die in der Vorlesung mit Hilfe des d'Alembertschen Prinzips hergeleiteten Bewegungsgleichungen reproduzieren. **(3P)**

11) **Forminvarianz der Lagrange-Gleichungen unter Punkttransformationen**

In den generalisierten Koordinaten $q_1, \ldots, q_f$ wird die Bewegung eines mechanischen Systems mit f Freiheitsgraden bekanntlich durch die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, f$$

beschrieben. Hier ist $L = L(q, \dot{q}, t)$; das Argument q steht wie üblich für den ganzen Koordinatensatz $q_1, \ldots, q_f$.

Es sei nun eine umkehrbare "Punkttransformation" von den "alten" Koordinaten q auf "neue" Koordinaten Q gegeben, also

$$Q_j = Q_j(q_1, \ldots, q_f, t) \equiv Q_j(q, t) \quad , \quad j = 1, \ldots, f \; .$$

a) Begründen Sie, warum die Größen $\dot{q}_j$ nicht nur von den Q, sondern auch von den $\dot{Q}$ abhängen:

$$\dot{q}_j = \dot{q}_j(Q, \dot{Q}, t) \quad , \quad j = 1, \ldots, f \; .$$

b) Rechnet man die "alte" Lagrange-Funktion L auf die neuen Koordinaten um, ergibt sich eine "neue" Funktion

$$\widetilde{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q,t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t) \ .$$

Zeigen Sie explizit, dass diese neue Funktion die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \dot{Q}_j} - \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial Q_j} = 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, f$$

erfüllt.

c) Das in b) auf mathematischem Wege hergeleitete Resultat kann man auch logisch erschließen, ohne eine einzige Zeile rechnen zu müssen. Mit welchem Argument? **(2P)**

12) **Bewegung in einem Zentralpotential**

a) Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem Zentralpotential $V(r)$. Stellen Sie die Lagrange-Funktion L dieses Systems in den üblichen Kugelkoordinaten r, ϑ, φ auf.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Lagrange-Gleichung zweiter Art für den Azimutalwinkel φ, dass $\partial L / \partial \dot{\varphi}$ eine "Erhaltungsgröße" ist, sich also im Laufe der Zeit nicht ändert. Zeigen Sie weiterhin, dass diese Erhaltungsgröße mit der Komponente L_z des Drehimpulses übereinstimmt, die die Bewegung senkrecht zur z-Achse beschreibt.

c) Zeigen Sie schließlich, dass aus den Lagrange-Gleichungen zweiter Art für r und ϑ die Energieerhaltung des Systems folgt. **(4P)**

Hinweis: Sie können dazu die Variable φ mit Hilfe des Resultates aus b) eliminieren!