Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 30. Oktober 2014

Übungen zur Vorlesung *Teilchen und Felder I*

(WiSe 2014/15, Übungsblatt 2)

`http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingTUF/TUF.html`

Abgabe: Donnerstag, 6. November bis 12:00 Uhr

5) **Schwingungsdauer des mathematischen Pendels (Teil 2)**

Gemäß Aufgabe 4 wird die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels mit Fadenlänge ℓ und maximalem Auslenkwinkel ϑ_0 durch

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\, K(\sin^2\vartheta_0/2)$$

gegeben, wobei

$$K(\sin^2\vartheta_0/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{1-\sin^2(\vartheta_0/2)\sin^2\psi}}$$

ein “vollständiges elliptisches Integral erster Art” bezeichnet. Entwickeln Sie diesen Ausdruck bis (einschließlich) zu Termen der Ordnung $\mathcal{O}(\sin^4(\vartheta_0/2))$ und zeigen Sie, dass die exakte Schwingungsdauer größer ist als das Resultat der harmonischen Näherung (siehe Aufgabe 3). Wie groß ist der relative Fehler dieser Näherung für maximale Auslenkwinkel von 1^o, 5^o, 10^o, 20^o, 30^o bzw. 40^o ? **(2P)**

6) **Die Atwoodsche Fallmaschine**

Zwei Massen m_1 und m_2 sind über ein masseloses Seil verbunden. Das Seil wird so über eine reibungsfrei gelagerte Rolle geführt, dass beide Massen im Schwerefeld der Erde hängen und sich entgegengesetzt vertikal bewegen können. Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen erster Art für dieses System auf, bestimmen und lösen Sie die Bewegungsgleichung für eine der beiden Massen und geben Sie die Seilspannung an. **(2P)**

7) **Rheonome Zwangskräfte verrichten reale Arbeit**

Ein Teilchen der Masse m gleitet reibungsfrei auf einer sehr langen Stange, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in der x-y-Ebene rotiert. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das Teilchen im Lagerpunkt der Stange, der mit dem Ursprung des Koordinatensystems zusammenfallen soll, und habe dort die Radialgeschwindigkeit v_0.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für das Teilchen auf und bestimmen Sie seine Geschwindigkeit durch Projektion dieser Gleichung auf die Radialrichtung. Berechnen Sie daraus die kinetische Energie des Teilchens als Funktion der Zeit.

b) Zeigen Sie durch Projektion der Bewegungsgleichung auf die Azimutalrichtung, dass das Anwachsen der kinetischen Energie durch das von der Zwangskraft ausgeübte Drehmoment verursacht wird. Warum ist das *kein* Widerspruch zum d'Alembertschen Prinzip?

<u>Hinweis:</u> Die Lösung der Aufgabe wird besonders übersichtlich, wenn Sie systematisch die beiden Einheitsvektoren

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad , \qquad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

sowie deren Eigenschaften verwenden. **(4P)**

8) **Gemischte Ableitungen nach "generalisierten Koordinaten" und der Zeit**

Es sei

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, \ldots, q_f, t)$$

eine Parametrisierung der Bewegung eines Teilchens mit f Freiheitsgraden. Beweisen Sie die beiden folgenden wichtigen Beziehungen:

a)

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$$

b)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial q_i}$$

(2P)