Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 23. Oktober 2014

Übungen zur Vorlesung *Teilchen und Felder I*

(WiSe 2014/15, Übungsblatt 1)

`http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingTUF/TUF.html`

Abgabe: Donnerstag, 30. Oktober bis 12:00 Uhr

1) Zur Berechnung von Tangentialvektoren

Es sei

$$\vec{r}(\vartheta, \varphi) = R \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

eine Parametrisierung der Oberfläche einer Kugel vom Radius R. Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}$$

in fast jedem Punkt dieser Oberfläche den Tangentialraum an die Kugel aufspannen. Wieso nur in "fast jedem" Punkt? **(2P)**

2) Aus der Analysis: Extrema mit Nebenbedingungen

a) Es sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Gesucht werden die Extrema, die diese Funktion auf der Menge

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F_\alpha(x) = 0 \,; \alpha = 1, \ldots, s\}$$

annimmt, wobei auch die s voneinander unabhängigen Funktionen $F_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar sind ($\alpha = 1, \ldots, s$; $s \leq n$). Erklären Sie, warum diese Extrema aus der Bedingung

$$\nabla g = \sum_{\alpha=1}^{s} \lambda_\alpha \nabla F_\alpha$$

zu bestimmen sind, wobei $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Sei nun

$$g(x, y, z) = x + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{9}z^3 \,.$$

Wenn man die Argumente von g auf den Ellipsoiden

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6} - 1 = 0$$

einschränkt, wo liegen dann Extremalpunkte von g? **(3P)**

3) **Das ebene Pendel**

Eine Punktmasse m ist an einem Faden der Länge ℓ im Schwerefeld der Erde aufgehängt, so dass sie ebene Schwingungen mit dem Auslenkwinkel $\vartheta = \vartheta(t)$ ausführen kann.

a) Zeigen Sie durch Projektion der Newtonschen Bewegungsgleichung des Massenpunktes auf die Tangente an den "Bewegungskreis", dass die Bewegungsgleichung für den Auslenkwinkel durch

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{\ell} \sin\vartheta = 0$$

gegeben wird. (Diese Gleichung soll analytisch, *nicht* graphisch hergeleitet werden!)

b) Lösen Sie diese Bewegungsgleichung in linearer Näherung, d.h. für kleine Auslenkwinkel, mit der Anfangsbedingung $\vartheta(0) = \vartheta_0$, $\dot{\vartheta}(0) = 0$. Was ist die Dauer einer Schwingungsperiode in dieser Näherung? **(2P)**

4) **Schwingungsdauer des mathematischen Pendels**

a) Betrachten Sie noch einmal ein mathematisches Pendel, das der in Aufgabe 3) hergeleiteten Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{\ell} \sin\vartheta = 0$$

gehorcht. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{2}\dot{\vartheta}^2 = \frac{g}{\ell}\left(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0\right) \ ,$$

wobei ϑ_0 den maximalen Auslenkwinkel bezeichnet.

b) Folgern Sie, dass

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\ell}{4g}} \int_0^{\vartheta(t)} \frac{\mathrm{d}\vartheta'}{\sqrt{\sin^2(\vartheta_0/2) - \sin^2(\vartheta'/2)}} \ ,$$

wobei $\vartheta(t_0) = 0$ angenommen wird.

c) Führen Sie nun mit Hilfe der Substitution

$$\sin(\vartheta/2) = \sin(\vartheta_0/2)\sin\psi$$

eine neue Variable ψ ein und zeigen Sie, dass damit die Schwingungsdauer des Pendels ohne Näherung durch

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\psi'}{\sqrt{1 - \sin^2(\vartheta_0/2)\sin^2\psi'}}$$

ausgedrückt werden kann. (Wird fortgesetzt!) **(3P)**