

# Teilchen und Felder I

---

Ein Begleittext

*Gleichungen sind wichtiger für mich, weil die Politik für die Gegenwart ist,  
aber eine Gleichung etwas für die Ewigkeit.*

Albert Einstein

*Seit die Mathematiker über die Relativitätstheorie hergefallen sind, verstehe ich sie selbst nicht mehr.*

Albert Einstein

---

*Erste Fassung,  
ausgearbeitet im Wintersemester 2014/15.  
Mit Abbildungen von Sören Sanders.*

## Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Theoretische Mechanik</b>	<b>5</b>
I.1	Die Lagrange-Formulierung der Mechanik . . . . .	5
I.1.1	Beispiel zur Orientierung: Zwangskräfte und Zwangsbedingungen . . . . .	5
I.1.2	Die Lagrange-Gleichungen erster Art . . . . .	8
I.1.3	Die Lagrange-Gleichungen zweiter Art . . . . .	14
I.1.4	Beispiele zum Lagrange-Formalismus . . . . .	21
I.1.5	Invarianzen und Erhaltungsgrößen . . . . .	34
I.2	Hamiltonsche Mechanik . . . . .	42
I.2.1	Hamilton-Funktion und Hamiltonsche Gleichungen . . . . .	42
I.2.2	Hamiltonsche Systeme als „dynamische Systeme“ . . . . .	51
I.2.3	Das Prinzip der kleinsten Wirkung . . . . .	56
I.2.4	Kommutierende Flüsse und integrable Systeme . . . . .	62
I.2.5	Weiterführung der Theorie: Ordnung und Chaos . . . . .	68
<b>II</b>	<b>Elektrodynamik</b>	<b>73</b>
II.1	Die Maxwell-Gleichungen und ihre Erhaltungsgrößen . . . . .	73
II.1.1	Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum . . . . .	73
II.1.2	Poynting-Vektor und Energieerhaltung . . . . .	76
II.1.3	Spannungstensor und Impulserhaltung . . . . .	79
II.2	Relativistische Formulierung der Elektrodynamik . . . . .	85
II.2.1	Lorentz-Transformationen . . . . .	85
II.2.2	Tensorkalkül . . . . .	95
II.2.3	Relativistische Mechanik eines freien Teilchens . . . . .	101
II.2.4	Relativistische Mechanik eines geladenen Teilchens . . . . .	105
II.2.5	Kovariante Form der Maxwell-Gleichungen . . . . .	114



# I Theoretische Mechanik

Es gibt einen „kanonischen Grundkurs“ der Theoretischen Physik, der in stets ähnlicher Form an allen Universitäten weltweit gelehrt wird und (mindestens) aus den folgenden Elementen besteht:

- Theoretische Mechanik
- Elektrodynamik
- Quantenmechanik
- Statistische Physik

Die Theoretische Mechanik steht hier nicht etwa deshalb am Anfang, weil sie besonders einfach wäre — ist sie nicht! —, sondern weil sie begriffliche Grundlagen liefert, die in anderen Teilgebieten der Physik weiterentwickelt und hinterfragt werden. Dieser konzeptionelle Zusammenhang prägt auch das vorliegende Skript, das Teile des Aufbaus der Theoretischen Mechanik und der klassischen Elektrodynamik umfasst: Das in der Mechanik entwickelte Wirkungsprinzip wird in der Elektrodynamik aufgegriffen, um die Maxwell-Gleichungen zu verstehen.

## I.1 Die Lagrange-Formulierung der Mechanik

Im Rahmen der Newtonschen Mechanik wird vorausgesetzt, dass alle Kräfte, die auf jedes einzelne Teilchen eines  $N$ -Teilchen-Systems wirken, explizit bekannt sind. Dann lassen sich die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{\vec{r}}_i(t) = \vec{F}(\{\vec{r}_i(t)\}) \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{I.1.1})$$

aufstellen und erlauben zusammen mit den Anfangsbedingungen  $\vec{r}_i(0)$ ,  $\dot{\vec{r}}_i(0)$  die Bestimmung der Bahnkurven (*Trajektorien*)  $\vec{r}_i(t)$ .

In vielen Fällen kennt man jedoch nicht alle Kräfte, sondern nur deren Auswirkungen: So kann etwa die Bewegung eines Teilchens durch gewisse „Zwangskräfte“ eingeschränkt werden und deswegen nicht mehr im ganzen Raum, sondern nur noch auf (ggf. gekrümmten) Flächen oder Linien erfolgen. In solchen Fällen benutzt man Lagrange-Methoden, die zusammengefasst häufig als „Lagrange-Formalismus“ bezeichnet werden.

Ein wichtiger Grund für die Beschäftigung mit diesen zunächst formal anmutenden, aber schließlich sehr eleganten Methoden besteht darin, dass sie auch in anderen Gebieten der Physik von überragender Bedeutung sind, nicht zuletzt für das Verständnis moderner (Quanten-)Feldtheorien.

### I.1.1 Beispiel zur Orientierung: Zwangskräfte und Zwangsbedingungen

Man betrachte ein *geometrisches Pendel*: Ein Massenpunkt  $m$  ist an einer masselosen starren Stange der Länge  $\ell$  im Ursprung des Koordinatensystems aufgehängt. Offenbar wirken dann auf diesen Massenpunkt am Ort  $\vec{r}(t)$  *zwei* Kräfte:

- (i) Die vertikal nach unten gerichtete Gewichtskraft  $\vec{F}_G$ ;  
(ii) eine weitere Kraft  $\vec{f}(t)$ , die dafür sorgt, dass der Massenpunkt auf der durch

$$r^2(t) - \ell^2 = 0 \quad (\text{I.1.2})$$

beschriebenen Kugeloberfläche bleibt.

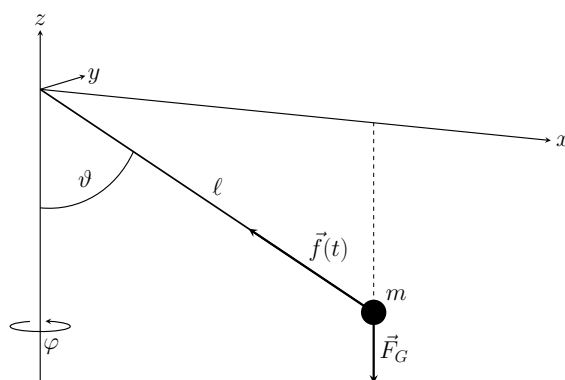


Abbildung I.1: Das *sphärische Pendel*. Auf einen Massenpunkt  $m$ , der an einer starren Stange der Länge  $\ell$  aufgehängt ist, wirken sowohl die Gewichtskraft  $\vec{F}_G$  als auch eine zunächst unbekannte „Zwangskraft“  $\vec{f}(t)$  in Richtung der Stange.

Diese zweite Kraft  $\vec{f}(t)$  wird *Zwangskraft* genannt. In der Newtonschen Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{F}_G + \vec{f}(t) \quad (\text{I.1.3})$$

ist diese Zwangskraft noch unbekannt, aber ihre Auswirkung ist klar: Sie sorgt dafür, dass die *Zwangsbedingung* (I.1.2) zu jedem Zeitpunkt eingehalten wird. Um die Bewegungsgleichung (I.1.3) zu lösen, kann man nun zwei verschiedene Ansätze verfolgen:

- (i) Man kann die Tatsache ausnutzen, dass  $\vec{f}$  immer senkrecht auf der Kugeloberfläche steht, auf der sich das Teilchen bewegt, also keine Komponente in Bewegungsrichtung hat — sonst wäre  $\vec{f}$  keine „Zwangskraft“, sondern eine so genannte *treibende Kraft*, die eine Bewegung des Pendelteilchens verursachen würde. Damit ist  $\vec{f}(t)$  von der Form

$$\vec{f}(t) = \lambda(t)\vec{r}(t), \quad (\text{I.1.4})$$

und man hat insgesamt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}}(t) &= \vec{F}_G + \lambda(t)\vec{r}(t) \\ r^2(t) - \ell^2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I.1.5})$$

Das sind vier Gleichungen für die drei Komponenten von  $\vec{r}(t)$  sowie für  $\lambda(t)$ , welche somit wohlbestimmt sind.

- (ii) Man kann auch die Bewegungsgleichung (I.1.3) „auf die Kugeloberfläche projizieren“: Dazu benötigt man zu jedem Bahnpunkt  $\vec{r}(t)$  zwei linear unabhängige Vektoren  $\vec{\tau}_1$ ,  $\vec{\tau}_2$ , die in diesem Punkt tangential an der Kugel  $r^2 = \ell^2$  liegen (da die Kugeloberfläche zweidimensional ist, gilt das auch für ihre *Tangentialräume*). Multipliziert man dann die Bewegungsgleichung skalar mit  $\vec{\tau}_1$  oder  $\vec{\tau}_2$ , fällt die Zwangskraft  $\vec{f}$  heraus, da ja  $\vec{f}$  *normal* zur Kugeloberfläche gerichtet ist, und man erhält zwei Gleichungen zur Beschreibung der beiden „Freiheitsgrade“ des Pendelteilchens.

In diesem konkreten Beispiel ist es leicht, die benötigten Tangentialvektoren zu finden: Beschreibt man die Bewegung des Pendelteilchens wie in der Abbildung I.1 mit Hilfe von Polarkoordinaten durch

$$\vec{r}(t) = r \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ -\cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (\text{I.1.6})$$

wobei  $\vartheta = \vartheta(t)$  und  $\varphi = \varphi(t)$ , so lautet die Zwangsbedingung einfach  $r = \ell$ , wogegen  $\vartheta$  und  $\varphi$  keinen Einschränkungen unterliegen. Aus

$$\vec{r}^2(\vartheta, \varphi) = \ell^2 \quad (\text{I.1.7})$$

folgen durch Differentiation sofort die beiden Beziehungen

$$\vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{r} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = 0. \quad (\text{I.1.8})$$

Also sind  $\vec{\tau}_1 = \partial \vec{r} / \partial \vartheta$  und  $\vec{\tau}_2 = \partial \vec{r} / \partial \varphi$  geeignete Tangentialvektoren: Aus der Newtonschen Gleichung (I.1.3) folgen damit die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} m \ddot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} &= \vec{F}_G \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \\ m \ddot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= \vec{F}_G \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (\text{I.1.9})$$

aus denen sich die gesuchten Funktionen  $\vartheta = \vartheta(t)$  und  $\varphi = \varphi(t)$  bestimmen lassen; damit kennt man  $\vec{r}(t)$ . Nachträglich lässt sich auch die Zwangskraft angeben, denn es ist

$$\vec{f}(t) = m \ddot{\vec{r}}(t) - \vec{F}_G. \quad (\text{I.1.10})$$

Es wird nun darum gehen, diese beiden Strategien zur Lösung der Bewegungsgleichung geeignet zu verallgemeinern: Strategie (i) führt auf die so genannten *Lagrange-Gleichungen erster Art*, Strategie (ii) auf die einfacheren *Lagrange-Gleichungen zweiter Art*, in denen keine Zwangskräfte mehr vorkommen. Insbesondere wird sich herausstellen, dass die (differential-)-geometrischen Konstruktionen nicht mühsam für jedes Problem einzeln durchgeführt werden müssen, sondern „automatisch“ korrekt impliziert werden, wenn man eine geeignete Funktion der jeweils unabhängigen Variablen einführt.

### I.1.2 Die Lagrange-Gleichungen erster Art

Betrachtet wird nun ein System aus  $N$  Teilchen, die sich an den Positionen  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$  befinden. Diese  $N$  Vektoren werden zu einem Element  $z$  des  $3N$ -dimensionalen *Konfigurationsraums*  $\mathcal{K}$  zusammengefasst:

$$z = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N). \quad (\text{I.1.11})$$

Außerdem gebe es  $s$  unabhängige Zwangsbedingungen der Form

$$F_\alpha(z, t) = 0 \quad , \quad \alpha = 1, \dots, s. \quad (\text{I.1.12})$$

Die Unabhängigkeit der Zwangsbedingungen bedeutet, dass keine eine Konsequenz der anderen ist; das wird im folgenden immer vorausgesetzt. Für jedes  $\alpha$  bildet nun die Menge der Konfigurationen, welche die Zwangsbedingung  $\alpha$  zum Zeitpunkt  $t$  erfüllen, also

$$\mathcal{M}_t^\alpha = \{z \in \mathcal{K} \mid F_\alpha(z, t) = 0\} \quad (\text{I.1.13})$$

eine  $(3N - 1)$ -dimensionale (Hyper-)Fläche in  $\mathcal{K}$ . Die Menge aller Konfigurationsraumpunkte, die sämtliche Zwangsbedingungen erfüllen, also die Mannigfaltigkeit

$$\mathcal{M}_t = \bigcap_{\alpha=1}^s \mathcal{M}_t^\alpha, \quad (\text{I.1.14})$$

beschreibt daher die möglichen Positionen der Teilchen zum Zeitpunkt  $t$ . Wenn nun die Zwangsbedingungen wie vorausgesetzt voneinander unabhängig sind, hat diese Mannigfaltigkeit die Dimension

$$f = 3N - s; \quad (\text{I.1.15})$$

diese Zahl  $f$  wird als Anzahl der *Freiheitsgrade* des Systems bezeichnet. (Beispiel: Im Falle des im vorherigen Abschnitt I.1.1 betrachteten sphärischen Pendels ist  $N = 1$ ,  $s = 1$  und daher  $f = 2$ ; diese beiden Freiheitsgrade wurden durch die Winkel  $\vartheta$  und  $\varphi$  beschrieben.) Zwangsbedingungen dieser Form (I.1.12), die also durch voneinander unabhängige Beziehungen zwischen den Teilchenorten und der Zeit beschrieben werden, heißen *holonom*. Falls  $\mathcal{M}_t$  nicht von der Zeit abhängt, heißen die (nun als holonom vorausgesetzten) Zwangsbedingungen *skleronom*, sonst *rheonom*. (Nicht-holonome, z.B. geschwindigkeitsabhängige Zwangsbedingungen der Form  $F_\alpha(z, \dot{z}, t) = 0$  sollen in dieser Einführung nicht behandelt werden.)

Die Zwangskräfte  $\vec{f}_i(t)$  ( $i = 1, \dots, N$ ), die auf die einzelnen Teilchen wirken, können nun ebenfalls zu einem  $3N$ -dimensionalen Vektor

$$Z = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_N) \quad (\text{I.1.16})$$

zusammengefasst werden. Diese Kräfte sorgen dafür, dass das System auf  $\mathcal{M}_t$  „gezwungen“ wird. Das ist ihre einzige Rolle: Zwangskräfte treiben ein System nicht an, besitzen daher keine Komponente tangential zu  $\mathcal{M}_t$ . Also kurz:



*Der Zwangskraftvektor  $Z$  steht im  $3N$ -dimensionalen Konfigurationsraum  $\mathcal{K}$  senkrecht zu  $\mathcal{M}_t$ .*

Aufgrund der Zwangsbedingungen kann sich das System (genauer: Der Konfigurationsraumpunkt  $z(t)$  des Systems) nicht normal zu  $\mathcal{M}_t$  bewegen, sondern nur tangential. Tangentialvektoren an  $\mathcal{M}_t$  mit „infinitesimaler Länge“ werden als *virtuelle Verrückungen* bezeichnet. In der älteren Literatur, in der auf den geometrischen Aspekt der durch Zwangsbedingungen eingeschränkten Bewegung kaum eingegangen und daher die Bedeutung der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_t$  als „Objekt im Konfigurationsraum“ nicht hervorgehoben wird, mutet die Definition dieser virtuellen Verrückungen (wie schon die Bezeichnung selbst) ein wenig mystisch an: Dort wird eine solche virtuelle Verrückung eingeführt als eine „infinitesimale Koordinatenänderung, die mit den Zwangsbedingungen verträglich ist und momentan durchgeführt wird“.<sup>1</sup> Dabei ist „mit den Zwangsbedingungen verträglich“ gleichbedeutend mit „tangential zu  $\mathcal{M}_t$ “, und „momentan durchgeführt“ bedeutet, dass sich diese Verrückung des System *nicht* als Lösung seiner Bewegungsgleichung ergibt (und daher „virtuell“ ist), sondern als geometrische Charakterisierung der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_t$ , wie sie zum Zeitpunkt  $t$  vorliegt. Es scheint jedoch wenig sinnvoll, zwar Tangentialvektoren in Form von virtuellen Verrückungen einzuführen, ohne gleichzeitig auch den Blick auf das eigentliche Objekt zu richten, dessen Tangentialvektoren betrachtet werden.

Es sei nun  $z(\sigma)$  eine Kurve, die zu festem Zeitpunkt  $t$  in  $\mathcal{M}_t$  verläuft, wobei  $z(0) = z_0$ . Die Verwendung des abstrakten Parameters  $\sigma$  soll erneut andeuten, dass die Kurve  $z(\sigma)$  keine Lösung der Bewegungsgleichung des Systems ist, sondern lediglich die Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_t$  auslotet, wie es etwa Koordinatenlinien tun. Dann gilt

$$F_\alpha(z(\sigma), t) = 0 \quad ; \quad \alpha = 1, \dots, s, \quad (\text{I.1.17})$$

also auch

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\sigma} F_\alpha(z(\sigma), t) \right|_{\sigma=0} &= \nabla F_\alpha(z(\sigma), t) \cdot \left. \frac{dz(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} \\ &= \nabla F_\alpha(z_0, t) \cdot \tau \\ &= 0, \end{aligned} \quad (\text{I.1.18})$$

wobei hier „ $\nabla$ “ den Gradienten im  $3N$ -dimensionalen Konfigurationsraum  $\mathcal{K}$  bezeichnet. Nun ist der Vektor

$$\tau = \left. \frac{dz(\sigma)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} \quad (\text{I.1.19})$$

konstruktionsgemäß ein Tangentialvektor an  $\mathcal{M}_t$ , und jeder Tangentialvektor kann durch Wahl einer geeigneten Kurve  $z(\sigma)$  in dieser Weise dargestellt werden. Damit besagt die Gleichung (I.1.18), dass ein Vektor  $\nabla F_\alpha(z_0, t)$  senkrecht auf dem  $(3N - s)$ -dimensionalen Tangentialraum an  $\mathcal{M}_t$  in dem Punkt  $z_0$  steht. Für unabhängige Zwangsbedingungen

<sup>1</sup>Siehe z.B. Wolfgang Nolting: *Grundkurs Theoretische Physik 2: Analytische Mechanik* (Springer, 8. Auflage 2011).

sind die  $s$  Vektoren  $\nabla F_\alpha(z_0, t)$  fast überall linear unabhängig, spannen also (fast überall) den  $s$ -dimensionalen *Normalraum* an  $\mathcal{M}_t$  auf. Da die Zwangskraft  $Z(t)$  in diesem Normalraum liegt, muss sie sich als Linearkombination der Gradienten der Zwangsbedingungen darstellen lassen:

$$Z(t) = \sum_{\alpha=1}^s \lambda_\alpha(t) \nabla F_\alpha(z, t). \quad (\text{I.1.20})$$

Die hier noch unbekanntenen Koeffizienten  $\lambda_\alpha(t)$  werden als *Lagrange-Multiplikatoren* bezeichnet. Sofern die Zwangsbedingungen unabhängig sind, sind die Gradienten  $\nabla F_\alpha(z, t)$  fast überall linear unabhängig, so dass diese Multiplikatoren eindeutig durch  $Z(t)$  bestimmt werden. Man erkennt hier, wenn auch vielleicht nicht auf den ersten Blick, eine Verallgemeinerung der Beziehung (I.1.4) für das sphärische Pendel.

Es seien nun  $q_1, \dots, q_f$  Koordinaten, die die „Zwangsbedingungs-mannigfaltigkeit“  $\mathcal{M}_t$  parametrisieren, so wie etwa die beiden Winkel  $\vartheta$  und  $\varphi$  mit Hilfe der Beziehung (I.1.6) eine Parametrisierung der Kugelfläche (I.1.7) liefern, die für das sphärische Pendel die Rolle der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_t$  spielt. Solche Koordinaten, die unabhängig voneinander verändert werden können, ohne die Zwangsbedingungen zu verletzen, werden als *generalisierte Koordinaten* bezeichnet; man benötigt also eine solche generalisierte Koordinate für jeden Freiheitsgrad. Das Pendelbeispiel mit  $q_1 = \vartheta$  und  $q_2 = \varphi$  zeigt auch, dass die generalisierten Koordinaten nicht unbedingt die Dimension eines Ortes besitzen müssen. Die möglichen Konfigurationen des Systems werden dann durch eine solche Parametrisierung

$$z = z(q_1, \dots, q_f, t) \quad (\text{I.1.21})$$

beschrieben. Da  $z$  auf der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_t$  liegt, bilden die Vektoren

$$\tau^k = \frac{\partial z}{\partial q_k} \quad ; \quad k = 1, \dots, f \quad (\text{I.1.22})$$

fast überall ein System von  $f$  linear unabhängigen Tangentialvektoren an  $\mathcal{M}_t$ , spannen also die Tangentialräume auf. Eine allgemeine virtuelle Verrückung im Punkt  $z(q_1, \dots, q_f, t)$ , also ein beliebiger infinitesimaler Tangentialvektor an  $\mathcal{M}_t$  in diesem Punkt, kann daher in der Form

$$\begin{aligned} \delta z &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial z}{\partial q_k} \delta q_k \\ &= (\delta \vec{r}_1, \dots, \delta \vec{r}_N) \end{aligned} \quad (\text{I.1.23})$$

dargestellt werden. Die bereits bekannte Aussage (I.1.20), dass die Zwangskraft normal („senkrecht“) zu  $\mathcal{M}_t$  orientiert ist und somit die Orthogonalitätsbeziehung

$$Z \cdot \delta z = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad (\text{I.1.24})$$

gilt, bildet den Inhalt des *d'Alembertschen Prinzips*:

*Die Zwangskräfte verrichten keine virtuelle Arbeit.*

Dabei versteht man unter der „virtuellen Arbeit“ diejenige Arbeit  $Z \cdot \delta z$ , die bei einer virtuellen Verrückung von den Zwangskräften am System verrichtet wird. Somit verschwindet die *Summe* (I.1.24) der Arbeiten, die bei einer virtuellen Verrückung an den einzelnen Teilchen geleistet wird. Angesichts anderslautender Aussagen in der Literatur<sup>2</sup> muss betont werden, dass es sich bei diesem Prinzip *nicht* etwa um ein neues („fundamentales“) Prinzip der Mechanik handelt; die im folgenden zu entwickelnde Lagrange-Formulierung der Mechanik ist der Newtonschen Mechanik in logischer Hinsicht vollkommen äquivalent, wenn auch in vielen Fällen einfacher (!) zu handhaben. Das d’Alembertsche Prinzip bildet lediglich einen anderen Ausdruck dessen, was Zwangskräfte definiert. Auch dadurch, dass dieser Zusammenhang aus (differential-)geometrischer Sicht unmittelbar einsichtig ist, wird die Einführung der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_t$  gerechtfertigt.

Aber Achtung: Falls die Zwangsbedingungen explizit zeitabhängig sind, können sie sehr wohl *reale* Arbeit verrichten, weil dann nämlich reale Bewegungen nicht mehr tangential zu  $\mathcal{M}_t$  verlaufen!

Setzt man nun voraus, dass die inneren und äußeren „treibenden“ Kräfte, die auf die Teilchen wirken, aus einem Potential  $U$  abgeleitet werden können, erhält man die Bewegungsgleichung des Systems in der Form

$$\dot{p}(t) = -\nabla U(z(t), t) + \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha}(t) \nabla F_{\alpha}(z(t), t), \quad (\text{I.1.25})$$

wobei hier die Impulsvektoren der  $N$  Teilchen nach bekanntem Muster zu einem einzigen  $3N$ -dimensionalen Vektor zusammengefasst wurden,

$$p = (\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_N). \quad (\text{I.1.26})$$

Führt man diese Bewegungsgleichung auf die einzelnen Teilchen zurück, wobei diese die Massen  $m_i$  besitzen sollen, erhält man das System

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\vec{r}}_i(t) &= -\vec{\nabla}_i U(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t); t) \\ &+ \sum_{\alpha=1}^s \lambda_{\alpha}(t) \vec{\nabla}_i F_{\alpha}(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t); t) \quad ; \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (\text{I.1.27})$$

Diese  $3N$  Gleichungen (I.1.27) bestimmen zusammen mit den  $s$  Gleichungen für die Zwangsbedingungen, also

$$F_{\alpha}(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t); t) = 0 \quad ; \quad \alpha = 1, \dots, s, \quad (\text{I.1.28})$$

die insgesamt gesuchten  $3N + s$  Funktionen  $\vec{r}_i(t)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) und  $\lambda_{\alpha}(t)$  ( $\alpha = 1, \dots, s$ ). Das System der  $3N + s$  Gleichungen (I.1.27) und (I.1.28) bildet die *Lagrange-Gleichungen erster Art*.

Um die Wirkungsweise dieser abstrakten Zusammenhänge zu verdeutlichen, sollen sie nun anhand eines konkreten Systems erprobt werden.

<sup>2</sup>Siehe z.B. Friedhelm Kuypers, *Klassische Mechanik* (Wiley-VCH, 9. Auflage 2010).

■ **Beispiel:** Eine Hantel auf einer Schiene (Lagrange I)

Zwei Teilchen mit Massen  $m_1$  und  $m_2$  sind durch eine masselose starre Stange der Länge  $\ell$  verbunden. Teilchen 1 wird mittels einer Schiene reibungsfrei entlang der  $x$ -Achse geführt; Teilchen 2 kann in der  $x$ - $y$ -Ebene unter dem Einfluss seiner Gewichtskraft schwingen.

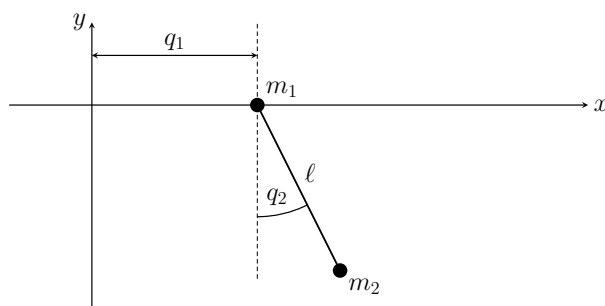


Abbildung I.2: *Die Hantel auf der Schiene.* Eine Hantel besteht aus zwei Massenpunkten  $m_1$  und  $m_2$ , die durch eine masselose starre Stange der Länge  $\ell$  verbunden sind. Teilchen 1 kann sich nur entlang der durch die  $x$ -Achse gebildeten Schiene bewegen; Teilchen 2 führt Schwingungen in der  $x$ - $y$ -Ebene aus. Als generalisierte Koordinaten eignen sich hier die Position  $x_1 = q_1$  des ersten Teilchens und der Auslenkwinkel  $\varphi = q_2$  des zweiten.

Da sich somit das gesamte System in der  $x$ - $y$ -Ebene bewegt, kann man von einem vierdimensionalen Konfigurationsraum ausgehen:  $\mathcal{K} = \{(x_1, y_1, x_2, y_2)\}$ .

Die beiden skleronomen Zwangsbedingungen

$$\begin{aligned} F_1 &= y_1 = 0 \\ F_2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - \ell^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{I.1.29})$$

schränken die Bewegung auf eine zeitunabhängige zweidimensionale Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}$  in  $\mathcal{K}$  ein, die sich aus dem „Produkt“ der Bewegungslinie des ersten und des „Drehkreises“ des zweiten Teilchens ergibt und damit die Topologie eines *Zylinders* hat.

Führt man für die beiden Zwangsbedingungen (I.1.29) die Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  ein, besitzen die Zwangskräfte entsprechend der Gleichung (I.1.20) die Form

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ \partial_{y_1} \end{pmatrix} (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) \\ &= \begin{pmatrix} 2\lambda_2(x_1 - x_2) \\ \lambda_1 + 2\lambda_2(y_1 - y_2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{I.1.30})$$

und

$$\begin{aligned} \vec{f}_2 &= \begin{pmatrix} \partial_{x_2} \\ \partial_{y_2} \end{pmatrix} (\lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2) \\ &= \begin{pmatrix} -2\lambda_2(x_1 - x_2) \\ -2\lambda_2(y_1 - y_2) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{I.1.31})$$

Die Kraft  $\vec{f}_1$  besitzt also eine Komponente  $(0, \lambda_1)^t$  in  $y$ -Richtung; diese sorgt für die Einhaltung der Zwangsbedingung  $F_1 = y_1 = 0$ . Der zweite Beitrag zu  $\vec{f}_1$  ist identisch mit  $-\vec{f}_2$ . Auch das ist unmittelbar einleuchtend: Die Zwangskraft  $\vec{f}_2$  sorgt dafür, Teilchen 2 genau im Abstand  $\ell$  von Teilchen 1 zu halten; dazu gehört eine „Gegenkraft“ auf das Teilchen 1. Man beachte vor allem, dass dieses Wissen nicht mehr eigens in die Lösung des Problems investiert werden muss, sondern bereits in dem allgemeinen Formalismus enthalten ist.

Bezeichnet man den Vektor der Erdbeschleunigung wie üblich mit  $\vec{g}$ , bilden nun die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1(t) &= m_1 \vec{g} + \vec{f}_1(t) \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2(t) &= m_2 \vec{g} + \vec{f}_2(t), \end{aligned} \quad (\text{I.1.32})$$

in welche die Ausdrücke (I.1.30) und (I.1.31) einzusetzen sind, gemeinsam mit den beiden Zwangsbedingungen (I.1.29) das hier benötigte System der Lagrange-Gleichungen erster Art.

„Im Prinzip“ hat man an dieser Stelle die Theorie bereits ausgeschöpft: Der Lagrange-Formalismus erlaubt das bequeme *Aufstellen* der Bewegungsgleichungen; das *Lösen* dieser Gleichungen lässt sich allerdings nicht standardisieren und erfordert weiteres Geschick. Es lohnt sich jedoch, vor der eigentlichen Lösung das Beispiel noch genauer zu betrachten und auch die weiteren zuvor eingeführten Konzepte zu erproben. Die Beschreibung der Bewegung wird einfacher, wenn man zwei unabhängige „generalisierte Koordinaten“  $q_1, q_2$  für die verbleibenden  $4 - 2 = 2$  Freiheitsgrade einführt. Dafür bieten sich, wie in Abbildung I.2 angedeutet, die Position des ersten Teilchens auf der  $x$ -Achse sowie der Auslenkwinkel der Hantelstange an:

$$\begin{aligned} q_1 &= x_1 \\ q_2 &= \varphi. \end{aligned} \quad (\text{I.1.33})$$

Die Position des Systems im Konfigurationsraum ergibt sich aus diesen generalisierten Koordinaten gemäß

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 \\ y_1 &= 0 \\ x_2 &= q_1 + \ell \sin q_2 \\ y_2 &= -\ell \cos q_2; \end{aligned} \quad (\text{I.1.34})$$

das ist eine konkrete Form der allgemeinen Parametrisierung (I.1.21) für dieses Beispiel. Damit erhalten die vorhin bestimmten Zwangskräfte die Gestalt

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= \begin{pmatrix} -2\lambda_2 \ell \sin q_2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 \ell \cos q_2 \end{pmatrix}, \\ \vec{f}_2 &= \begin{pmatrix} 2\lambda_2 \ell \sin q_2 \\ -2\lambda_2 \ell \cos q_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{I.1.35})$$

Andererseits führen die Tangentialvektoren (I.1.22), die die möglichen Richtungen der virtuellen Verrückungen bestimmen, auf die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & ; & \quad \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & ; & \quad \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_2} = \begin{pmatrix} \ell \cos q_2 \\ \ell \sin q_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{I.1.36})$$

und das d'Alembertsche Prinzip (I.1.24) liefert die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_1} + \vec{f}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_1} &= 0 \\ \vec{f}_1 \cdot \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial q_2} + \vec{f}_2 \cdot \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial q_2} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I.1.37})$$

Setzt man hier die Ausdrücke (I.1.36) ein, so besagt die obere Gleichung:

„Die  $x$ -Komponenten von  $\vec{f}_1$  und  $\vec{f}_2$  addieren sich zu Null.“

Auch die untere lässt sich einfach in Worten ausdrücken:

„Die Zwangskraft  $\vec{f}_2$  ist parallel zur Verbindungslinie von Teilchen 1 und Teilchen 2 gerichtet.“

Ausgehend vom d'Alembertschen Prinzip erschließt man daher die Zwangskräfte in der Form

$$\vec{f}_2 = \tilde{\lambda}_2 \begin{pmatrix} \ell \sin q_2 \\ -\ell \cos q_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} -\tilde{\lambda}_2 \ell \sin q_2 \\ \tilde{\lambda}_1 \end{pmatrix} \quad (\text{I.1.38})$$

mit noch zu bestimmenden Größen  $\tilde{\lambda}_1$  und  $\tilde{\lambda}_2$ ; diese Form ist natürlich mit dem vorherigen Resultat (I.1.35) verträglich. ■

Das Beispiel zeigt, dass es je nach Situation rechentechnisch günstiger sein kann, *entweder* von der Lagrange-Darstellung (I.1.20) der Zwangskraft als Element des Normalraumes an  $\mathcal{M}_t$  auszugehen *oder* das d'Alembertsche Prinzip (I.1.24) an den Anfang zu stellen. Beide Beziehungen drücken den gleichen geometrischen Sachverhalt aus und führen daher stets zum gleichen Ergebnis.

### I.1.3 Die Lagrange-Gleichungen zweiter Art

Es soll nun noch einmal das Beispiel der Hantel auf der Schiene aufgegriffen werden, um auch die zweite in Abschnitt I.1.1 skizzierte Strategie zur Lösung der Bewegungsgleichung zu verdeutlichen: Projiziert man die Bewegungsgleichung auf den Tangentialraum an  $\mathcal{M}_t$ , so fällt die dazu senkrechte Zwangskraft heraus; genau an dieser Stelle wird das d'Alembertsche Prinzip ausgenutzt.

■ **Beispiel:** Eine Hantel auf einer Schiene (Lagrange II)

Multipliziert man die erste der Bewegungsgleichungen (I.1.32) skalar mit  $\partial \vec{r}_1 / \partial q_k$ , wobei  $k = 1$  oder  $k = 2$ , die zweite mit  $\partial \vec{r}_2 / \partial q_k$  (mit gleichem  $k!$ ) und addiert die Resultate, so fallen aufgrund des d'Alembertschen Prinzips (I.1.37) die Zwangskräfte heraus. Berücksichtigt man weiterhin die konkrete Gestalt (I.1.36) dieser Vektoren, so erhält man sofort das System

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 \cos \varphi + m_2 \ddot{y}_2 \sin \varphi &= -m_2 g \sin \varphi . \end{aligned} \quad (\text{I.1.39})$$

Damit ist erneut das erreicht, was die allgemeine Theorie leisten kann, nämlich das Aufstellen von zwei Gleichungen für die beiden Freiheitsgrade des Systems; der „Rest“ der Arbeit besteht nun in ihrer Lösung.

Die Parametrisierung (I.1.34) durch die generalisierten Koordinaten  $q_1 = x_1$ ,  $q_2 = \varphi$  liefert nun

$$\ddot{x}_1 = \ddot{q}_1 \quad (\text{I.1.40})$$

sowie

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \dot{q}_1 + \ell \dot{q}_2 \cos q_2 \\ \ddot{x}_2 &= \ddot{q}_1 + \ell \ddot{q}_2 \cos q_2 - \ell \dot{q}_2^2 \sin q_2 \end{aligned} \quad (\text{I.1.41})$$

und

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= \ell \dot{q}_2 \sin q_2 \\ \ddot{y}_2 &= \ell \ddot{q}_2 \sin q_2 + \ell \dot{q}_2^2 \cos q_2 . \end{aligned} \quad (\text{I.1.42})$$

Damit erhält das System (I.1.39) die Gestalt

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + m_2 \ddot{q}_1 + m_2 \ell \ddot{q}_2 \cos q_2 - m_2 \ell \dot{q}_2^2 \sin q_2 &= 0 \\ \cos q_2 \left( \ddot{q}_1 + \ell \ddot{q}_2 \cos q_2 - \ell \dot{q}_2^2 \sin q_2 \right) \\ + \sin q_2 \left( \ell \ddot{q}_2 \sin q_2 + \ell \dot{q}_2^2 \cos q_2 + g \right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{I.1.43})$$

oder, nach kurzer Umformung,

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{q}_1 + m_2 \ell \left( \ddot{q}_2 \cos q_2 - \dot{q}_2^2 \sin q_2 \right) &= 0 \\ \ddot{q}_1 \cos q_2 + \ell \ddot{q}_2 + g \sin q_2 &= 0 . \end{aligned} \quad (\text{I.1.44})$$

Dieses System kann elementar gelöst werden. An dieser Stelle soll nur seine lineare Näherung betrachtet werden, die sich für kleine Auslenkwinkel ergibt: Mit  $\sin q_2 \approx q_2$  und  $\cos q_2 \approx 1$  erhält man

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{q}_1 &= -m_2 \ell \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_1 + \ell \ddot{q}_2 &= -g q_2 ; \end{aligned} \quad (\text{I.1.45})$$

Elimination von  $q_1$  liefert

$$(m_1 + m_2)(-\ell\ddot{q}_2 - gq_2) = -m_2\ell\ddot{q}_2 \quad (\text{I.1.46})$$

oder

$$\ell\ddot{q}_2 + gq_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\ell\ddot{q}_2. \quad (\text{I.1.47})$$

Das ergibt die einfache Schwingungsgleichung

$$\ddot{q}_2 + \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{\ell} q_2 = 0, \quad (\text{I.1.48})$$

deren allgemeine Lösung mit Hilfe von zwei Integrationskonstanten sofort angegeben werden kann:

$$q_2(t) = q_2^{(0)} \cos(\omega(t - t_0)), \quad (\text{I.1.49})$$

wobei die Kreisfrequenz  $\omega$  durch

$$\omega^2 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \frac{g}{l} \quad (\text{I.1.50})$$

gegeben wird. Aus der ersten der beiden Gleichungen (I.1.45), also aus

$$\ddot{q}_1 = -\frac{m_2\ell}{m_1 + m_2}\ddot{q}_2, \quad (\text{I.1.51})$$

erhält man schließlich auch die Bewegung des anderen Freiheitsgrades mit zwei weiteren Integrationskonstanten,

$$q_1(t) = -\frac{m_2\ell}{m_1 + m_2} q_2^{(0)} \cos(\omega(t - t_0)) + c_0 + c_1 t. \quad (\text{I.1.52})$$

Während also die Masse  $m_2$  kleine Schwingungen ausführt, überlagert sich der geradlinig-gleichförmigen Bewegung der Masse  $m_1$  mit der Geschwindigkeit  $c_1$  eine Oszillation mit gleicher Frequenz  $\omega$ . Diese Frequenz weicht gemäß der Gleichung (I.1.50) von der Frequenz  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  eines einfachen Pendels ab, weil nämlich die träge Masse des Hantelsystems durch die Summe  $m_1 + m_2$  gegeben wird, die schwere Masse dagegen nur durch  $m_2$ . Für den Fall, dass  $m_1$  deutlich größer ist als  $m_2$ , wird die Rückwirkung der Pendelbewegung von  $m_2$  auf  $m_1$  vernachlässigbar: Für den formalen Grenzfall  $m_1 \rightarrow \infty$  findet man

$$\begin{aligned} q_1(t) &\rightarrow c_0 + c_1 t, \\ \omega^2 &\rightarrow \frac{g}{\ell}, \end{aligned} \quad (\text{I.1.53})$$

was genau der Erwartung entspricht, weil nun die Bewegung der kleinen Masse die der "unendlich großen" nicht mehr beeinflussen kann. ■



Der entscheidende Schritt in dem obigen Beispiel bestand in der Elimination der Zwangskräfte gleich zu Anfang durch Projektion der ursprünglichen Bewegungsgleichung (I.1.32) auf die Tangentialrichtungen an  $\mathcal{M}$ . Ziel der nun folgenden Überlegungen ist es, diesen Schritt *einmal* in allgemeiner Form durchzuführen, so dass sein Ergebnis zukünftig für *alle* Systeme zur Verfügung steht, ohne die Elimination der Zwangskraft noch explizit leisten zu müssen.

Dazu sei

$$q = (q_1, \dots, q_f) \quad (\text{I.1.54})$$

ein geeigneter Satz von generalisierten Koordinaten des vorliegenden Systems. Eine von diesem System tatsächlich durchlaufene Bahnkurve im Konfigurationsraum wird damit kurz als  $z(q, t)$  geschrieben; die entlang der Bahnkurve stets erfüllten Zwangsbedingungen lauten

$$F_\alpha(z(q, t), t) = 0 \quad ; \quad \alpha = 1, \dots, s. \quad (\text{I.1.55})$$

Die auf das System insgesamt wirkenden Kräfte werden wie üblich in die aus einem Potential  $U$  abgeleiteten treibenden Kräfte und die Zwangskräfte (I.1.16) zerlegt:

$$\dot{p}(t) = -\nabla U(z(t), t) + Z(t). \quad (\text{I.1.56})$$

Multipliziert man diese Bewegungsgleichung nun skalar mit einem der  $f$  Tangentialvektoren (I.1.22), so fällt die dazu orthogonale Zwangskraft  $Z$  heraus, und man erhält

$$\begin{aligned} \dot{p} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_k} &= -\nabla U \cdot \frac{\partial z}{\partial q_k} \\ &= -\frac{\partial U(z(q_1, \dots, q_f; t), t)}{\partial q_k}. \end{aligned} \quad (\text{I.1.57})$$

Um zunächst die linke Seite dieser Gleichung in eine bequeme Form zu bringen, geht man vom Konfigurationsraum in den Anschauungsraum zurück und findet mit Hilfe der „rückwärts“ angewandten Produktregel die Beziehung

$$\begin{aligned} \dot{p} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_k} &= \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}. \end{aligned} \quad (\text{I.1.58})$$

Nun folgen zwei kleine, aber wichtige Nebenrechnungen: Der Geschwindigkeitsvektor des  $i$ -ten Teilchens, ausgedrückt durch generalisierte Koordinaten, besitzt die Form

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}_i &= \frac{d}{dt} \vec{r}_i(q_1, \dots, q_f; t) \\ &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}; \end{aligned} \quad (\text{I.1.59})$$

daraus folgt sofort

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} . \quad (\text{I.1.60})$$

Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} &= \sum_{j=1}^f \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_{j=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} , \end{aligned} \quad (\text{I.1.61})$$

wobei im zweiten Schritt die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen ausgenutzt wurde. Setzt man diese beiden Identitäten (I.1.60) und (I.1.61) in die Beziehung (I.1.58) ein, so kann man die tangential projizierte Gesamtkraft weiter umformen:

$$\begin{aligned} \dot{p} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_k} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \frac{\partial}{\partial q_k} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} , \end{aligned} \quad (\text{I.1.62})$$

wobei die hier eingeführte Größe

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \quad (\text{I.1.63})$$

die gesamte *kinetische Energie* des Systems bezeichnet. Fassen wir zusammen: Aus der Ausgangsgleichung (I.1.57), die durch Projektionen der Newtonschen Bewegungsgleichung erhalten wurde, also aus

$$\dot{p} \cdot \frac{\partial z}{\partial q_k} = - \frac{\partial U}{\partial q_k} , \quad (\text{I.1.64})$$

folgt mit Hilfe der Umformung (I.1.62) die Beziehung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = - \frac{\partial U}{\partial q_k} . \quad (\text{I.1.65})$$

Nun hängt das Potential  $U$  über die Parametrisierung  $z = z(q, t)$  zwar von den generalisierten Koordinaten, nicht jedoch von den *generalisierten Geschwindigkeiten*  $\dot{q}_k$  ab, so dass diese Beziehung in die Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_k} = 0 \quad (\text{I.1.66})$$

gebracht werden kann. Definiert man also die *Lagrange-Funktion* des gegebenen Systems als *Differenz* von kinetischer und potentieller Energie,

$$\begin{aligned} & L(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f; t) \\ & = T(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f; t) - U(z(q_1, \dots, q_f; t), t) , \end{aligned} \quad (\text{I.1.67})$$

so erhält die in die Tangentialrichtungen projizierte Newtonsche Bewegungsgleichung ihre endgültige Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad ; \quad k = 1, \dots, f . \quad (\text{I.1.68})$$

Das sind die überaus wichtigen *Lagrange-Gleichungen zweiter Art*. Sie bilden ein System von  $f$  gekoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die gesuchten Funktionen  $q_1(t), \dots, q_f(t)$ , die die vom System durchlaufene Bahnkurve beschreiben.

Wie elegant und leistungsfähig der auf diesen Gleichungen (I.1.68) beruhende Formalismus ist, soll im folgenden Abschnitt I.1.4 anhand von einigen wichtigen Beispielen gezeigt werden. Vorher noch drei Bemerkungen:

- (i) Wenn es *keine* Zwangsbedingungen gibt, dann können z.B. kartesische Koordinaten (oder andere Koordinaten, die daraus durch eine invertierbare Transformation hervorgehen) selbst als generalisierte Koordinaten gewählt werden. Dann hat man eine Lagrange-Funktion der Form

$$L(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N; t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; t) , \quad (\text{I.1.69})$$

so dass<sup>3</sup>

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = \frac{d}{dt} m_i \dot{\vec{r}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i \quad (\text{I.1.70})$$

sowie

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} . \quad (\text{I.1.71})$$

Daher liefern nun die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \vec{0} \quad (\text{I.1.72})$$

genau die bekannten Newtonschen Gleichungen

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i + \vec{\nabla}_i U = \vec{0} . \quad (\text{I.1.73})$$

Das Aufstellen der Lagrange-Gleichungen zweiter Art mit Hilfe einer Lagrange-Funktion liefert somit ein allgemeines Verfahren, um die Bewegungsgleichung eines Systems in beliebigen (evtl. „krummlinigen“) Koordinaten zu formulieren, sogar in Gegenwart holonomer Zwangsbedingungen. Die Frage, wie man diese Gleichungen dann lösen kann, wird dadurch allerdings nicht berührt.

---

<sup>3</sup>Hier wird eine einprägsame symbolische Schreibweise benutzt — selbstverständlich wird nicht „nach einem Vektor differenziert“!

- (ii) Die generalisierten Koordinaten  $q_1, \dots, q_f$  können beliebig gewählt werden, solange sie  $\mathcal{M}_t$  korrekt parametrisieren. Wechselt man also durch eine invertierbare Transformation

$$q_k = q_k(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_f; t), \quad (\text{I.1.74})$$

die in der Lagrange-Mechanik als *Punkttransformation* bezeichnet wird, von einem Koordinatensatz  $q_1, \dots, q_f$  zu einem anderen Satz  $\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_f$ , so gelten für die generalisierten Geschwindigkeiten Beziehungen der Form

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= \sum_{j=1}^f \frac{\partial q_k}{\partial \bar{q}_j} \dot{\bar{q}}_j + \frac{\partial q_k}{\partial t} \\ &= \dot{q}_k(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_f, \dot{\bar{q}}_1, \dots, \dot{\bar{q}}_f; t), \end{aligned} \quad (\text{I.1.75})$$

und die „neue“ Lagrange-Funktion ergibt sich aus der „alten“ durch Einsetzen:

$$\bar{L}(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_f, \dot{\bar{q}}_1, \dots, \dot{\bar{q}}_f; t) = L(q(\bar{q}, t), \dot{q}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, t); t). \quad (\text{I.1.76})$$

In den neuen Koordinaten gelten dann die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}_k} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}_k} = 0, \quad (\text{I.1.77})$$

d.h. die Lagrange-Gleichungen (I.1.68) sind *forminvariant* unter Punkttransformationen. (*Übungsaufgabe!*) Diese Tatsache liefert eine bequeme Möglichkeit, um Bewegungsgleichungen von einem Koordinatensystem in ein anderes umzurechnen.

- (iii) Bei der Herleitung der Lagrange-Gleichungen wurde vorausgesetzt, dass die treibenden Kräfte konservativ sind, sich also als negativer Gradient eines Potentials  $U$  ergeben. Hier ist eine interessante Verallgemeinerung möglich, die später für die Elektrodynamik von großer Bedeutung sein wird: Man spricht von einer *generalisierten Kraft*  $K$ , wenn sich deren Komponenten gemäß einer Vorschrift

$$K_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \quad (\text{I.1.78})$$

aus einem explizit geschwindigkeitsabhängigen *generalisierten Potential*

$$U = U(q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f; t) \quad (\text{I.1.79})$$

herleiten lassen. Dann lautet nämlich die Newtonsche Bewegungsgleichung in kartesischen Koordinaten

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i} + \vec{f}_i, \quad (\text{I.1.80})$$

und die Zwangskräfte werden nach bekanntem Muster durch Projektion auf die Tangentialrichtungen an  $\mathcal{M}_t$  eliminiert. Dazu benötigt man die Umformung

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \left( -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \\
&= \sum_{i=1}^N \left[ -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right] \\
&= \sum_{i=1}^N \left[ -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} \right] \\
&= \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k}, \tag{I.1.81}
\end{aligned}$$

in welche nach der „Produktregel rückwärts“ im ersten Schritt erneut die beiden Identitäten (I.1.60) und (I.1.61) im zweiten eingehen. Da weiterhin, wie bereits aus Gleichung (I.1.62) bekannt,

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}, \tag{I.1.82}$$

erhält man auch aus der Newtonschen Gleichung (I.1.80) mit einer generalisierten Kraft (I.1.78) wieder die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad ; \quad k = 1, \dots, f, \tag{I.1.83}$$

wobei die Lagrange-Funktion  $L = T - U$  nun mit dem generalisierten Potential (I.1.79) gebildet wird.

#### I.1.4 Beispiele zum Lagrange-Formalismus

Es stellt sich die Frage, ob die Natur Gebrauch macht von der Möglichkeit, die durch Gleichung (I.1.78) eröffnet wird, d.h. ob es generalisierte Kräfte dieser Form tatsächlich gibt. Wenn man über die Mechanik hinausgeht, findet man sofort eine sehr wichtige Realisierung:

##### (i) Geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld

Ein elektromagnetisches Feld  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  wird bekanntlich mit Hilfe eines *skalaren Potentials*  $\Phi(\vec{r}, t)$  und eines *Vektorpotentials*  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  beschrieben; es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\
\vec{E} &= -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}. \tag{I.1.84}
\end{aligned}$$

Auf ein Teilchen der Masse  $m$  und Ladung  $e$ , das sich in einem solchen Feld mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt, wirkt die *Lorentz-Kraft*

$$m\ddot{\vec{r}} = e \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) . \quad (\text{I.1.85})$$

Diese Kraft kann als eine generalisierte Kraft im Sinne der Gleichung (I.1.78) aufgefasst werden, da sie sich nämlich aus einem generalisierten Potential

$$U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = e\Phi(\vec{r}, t) - e\vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}} \quad (\text{I.1.86})$$

ergibt. Die Lagrange-Funktion eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld lautet daher

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - e\Phi(\vec{r}, t) + e\vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}} . \quad (\text{I.1.87})$$

Denn: Mit dieser Lagrange-Funktion (I.1.87) findet man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} &= \frac{d}{dt} \left( m\dot{\vec{r}} + e\vec{A}(\vec{r}, t) \right) \\ &= m\ddot{\vec{r}} + e \left( (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) \end{aligned} \quad (\text{I.1.88})$$

sowie

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -e\vec{\nabla}\Phi + e\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}) . \quad (\text{I.1.89})$$

Die Lagrange-Gleichung zweiter Art liefert daher

$$m\ddot{\vec{r}} + e \left( (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) + e\vec{\nabla}\Phi - e\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}) = 0 . \quad (\text{I.1.90})$$

Setzt man hier die zweite der Darstellungen (I.1.84) ein, also  $\vec{\nabla}\Phi = -\vec{E} - \partial\vec{A}/\partial t$ , so erhält man daraus

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E} + e \left( \vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \dot{\vec{r}}) - (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \right) . \quad (\text{I.1.91})$$

Für die weitere Vereinfachung dieses Ausdrucks bietet sich der bequeme (allerdings etwas gewöhnungsbedürftige) „ $\varepsilon$ -Kalkül“ an, in dessen Rahmen Kreuzprodukte mit Hilfe des total antisymmetrischen Tensors dritter Stufe dargestellt werden: Man findet damit komponentenweise<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \left( \dot{\vec{r}} \times \vec{B} \right)_i &= \varepsilon_{ijk} \dot{r}_j B_k \\ &= \varepsilon_{ijk} \dot{r}_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \dot{r}_j \partial_l A_m \\ &= \dot{r}_j \partial_i A_j - \dot{r}_j \partial_j A_i \\ &= \left[ \vec{\nabla}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) - (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \right]_i \end{aligned} \quad (\text{I.1.92})$$

<sup>4</sup>Beachte, dass hier die Einsteinsche Summenkonvention benutzt wird: Über doppelt vorkommende Indizes wird summiert!

und somit auch

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{B} = \vec{\nabla}(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}) - (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}. \quad (\text{I.1.93})$$

Setzt man das in Gleichung (I.1.91) ein, ergibt sich in der Tat der bekannte Ausdruck

$$m\ddot{\vec{r}} = e \left( \vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B} \right). \quad (\text{I.1.94})$$

Dieses Beispiel zeigt, dass eine Lagrange-Funktion dann „richtig“ ist, wenn sie die bereits bekannte Bewegungsgleichung liefert. Dann ist allerdings die in diesem Sinne richtige Lagrange-Funktion nicht eindeutig. (*Übungsaufgabe!*)

Der Lagrange-Formalismus bietet sich auch an, um bereits bekannte Tatsachen in sehr übersichtlicher Weise zusammenzufassen und Zusammenhänge deutlich zu machen. Das wird durch das folgende Beispiel hervorgehoben:

### (ii) Bewegung in einem Zentralkraftfeld

Die Bewegung eines Teilchens der Masse  $m$  in einem Zentralkraftfeld mit einem radial-symmetrischen Potential  $V(r)$  verläuft in einer „Bahnebene“ und kann daher mit ebenen Polarkoordinaten beschrieben werden. Ohne das Potential näher zu spezifizieren, lautet die Lagrange-Funktion dann

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r). \quad (\text{I.1.95})$$

Da hier die Variable  $\varphi$  nicht vorkommt, ist

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \quad (\text{I.1.96})$$

und die Lagrange-Gleichung zweiter Art für die generalisierte Koordinate  $\varphi$  erhält die Gestalt

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} (mr^2\dot{\varphi}) = 0. \quad (\text{I.1.97})$$

Hieraus kann sofort die Existenz einer *Erhaltungsgröße* erschlossen werden, also einer von den generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten abhängigen Funktion, die sich längs der vom System durchlaufenen Bahn nicht ändert.<sup>5</sup>

$$mr^2\dot{\varphi} = \text{const.}; \quad (\text{I.1.98})$$

diese Erhaltungsgröße soll mit dem Symbol  $\ell$  bezeichnet werden. Betrachtet man nun den Drehimpulsvektor des Teilchens, der durch

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (\text{I.1.99})$$

gegeben wird, so ist anhand von Abbildung I.3 leicht zu sehen, dass  $\ell = |\vec{\ell}|$  mit dem Betrag des Drehimpulses für die Bewegung um das Kraftzentrum übereinstimmt:

<sup>5</sup>Eine Erhaltungsgröße wird daher häufig auch als *Konstante der Bewegung* bezeichnet.

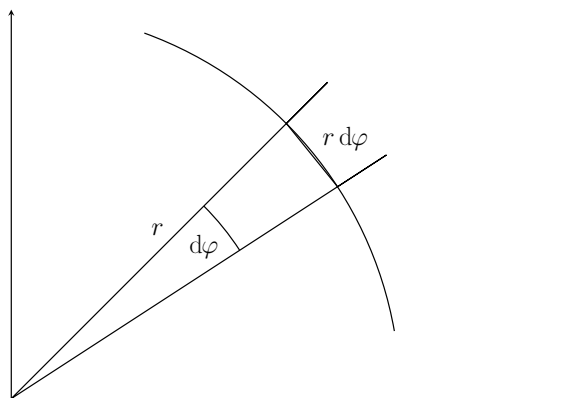


Abbildung I.3: *Der Drehimpuls in ebenen Polarkoordinaten.* Aus der Definition (I.1.99) des Drehimpulsvektors mit dem Kraftzentrum als Ursprung folgt, dass  $|\vec{\ell}| = r \cdot m r d\varphi/dt$ .

Die Drehimpulserhaltung hat eine anschauliche Konsequenz: Betrachtet man den vom Kraftzentrum zum Teilchen gezogenen „Fahrstrahl“,<sup>6</sup> so überstreicht dieser in der infinitesimal kleinen Zeit  $dt$  die Fläche

$$dA = \frac{1}{2} r \cdot r d\varphi ; \quad (\text{I.1.100})$$

die „Flächengeschwindigkeit“ beträgt also

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{\ell}{2m} = \text{const.} \quad (\text{I.1.101})$$

In Worten ausgedrückt:

*Der vom Kraftzentrum zum Teilchen gezogene Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.*

Diese Aussage, die die Drehimpulserhaltung beinhaltet, wurde von Johannes Kepler speziell für die Planetenbewegung formuliert und in seinem 1609 erschienenen Werk *Astronomia Nova* veröffentlicht („Zweites Keplersches Gesetz“). Sie gilt jedoch nicht nur für das zu  $1/r$  proportionale Gravitationspotential, sondern sogar für *jedes* Zentralpotential!

Der hier exemplarisch diskutierte Zusammenhang lässt sich sofort in eine allgemeine Form bringen. Eine generalisierte Koordinate  $q$ , die in der Lagrange-Funktion nicht vorkommt, heißt *zyklisch*.<sup>7</sup> Für eine zyklische Koordinate gilt also

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0 , \quad (\text{I.1.102})$$

<sup>6</sup>Eine etymologische Randbemerkung: Die lateinische Entsprechung des antiquiert wirkenden Wortes „Fahrstrahl“ ist „Vektor“. Vermutlich geht unser heutiger Gebrauch des Wortes „Vektor“ auf diesen Ursprung zurück.

<sup>7</sup>Warum hier ein „Zyklus“ ins Spiel kommt, ist an dieser Stelle noch nicht zu erkennen. Die Erklärung dieses Begriffes muss daher auf später verschoben werden.



so dass

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \text{const.} \quad (\text{I.1.103})$$

Damit kann eine interessante Aussage formuliert werden:

*Zu jeder zyklischen Koordinate gehört eine Erhaltungsgröße.*

Hier deutet sich ein Zusammenhang an, der später noch wichtig werden wird. Wenn eine Koordinate  $q$  zyklisch ist, bleibt die Lagrange-Funktion unter einer Veränderung von  $q$  invariant; es besteht daher eine enge Verbindung zwischen Invarianzen und Erhaltungsgrößen. So ist etwa die durch Gleichung (I.1.97) ausgedrückte Drehimpulserhaltung eine Konsequenz der Invarianz des Systems (I.1.95) unter Veränderungen von  $\varphi$ , d.h. unter Drehungen.

Die noch fehlende Lagrange-Gleichung zweiter Art für die Radialkoordinate des Systems (I.1.95) führt mit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{d}{dt} m\dot{r} = m\ddot{r} \quad (\text{I.1.104})$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\varphi}^2 - \frac{dV}{dr} \quad (\text{I.1.105})$$

auf die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{r} - m r \dot{\varphi}^2 + \frac{dV}{dr} = 0. \quad (\text{I.1.106})$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe eines häufig benutzten Tricks integriert werden. Multiplikation mit  $\dot{r}$  ergibt zunächst

$$m\dot{r}\ddot{r} - m r \dot{\varphi}^2 \dot{r} + \frac{dV}{dr} \dot{r} = 0. \quad (\text{I.1.107})$$

Aus der bereits bekannten Drehimpulserhaltung (I.1.97) erhält man nun

$$\frac{d}{dt} m r^2 \dot{\varphi} = m r (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = 0 \quad (\text{I.1.108})$$

oder

$$\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = -\dot{r}\dot{\varphi}. \quad (\text{I.1.109})$$

Nutzt man diese Beziehung in Gleichung (I.1.107) aus, so folgt

$$\begin{aligned} & m\dot{r}\ddot{r} + m r \dot{\varphi} (\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) + \frac{dV}{dr} \dot{r} \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + V(r) \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I.1.110})$$

Damit ist auch die Größe

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = E \quad (\text{I.1.111})$$

eine Erhaltungsgröße des Systems; offensichtlich handelt es sich hierbei um seine Gesamtenergie.

Die Tatsache, dass für das System (I.1.95) mit seinen zwei durch  $r$  und  $\varphi$  beschriebenen Freiheitsgraden zwei Erhaltungsgrößen existieren, erlaubt nun eine systematische Bestimmung der Bahnkurven. Geht man dazu von der Energieerhaltung aus und benutzt den Zusammenhang

$$\ell = mr^2\dot{\varphi} \ , \quad (\text{I.1.112})$$

kann man die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\varphi}$  eliminieren und auch den *azimutalen* Beitrag zur kinetischen Energie durch die *Radial*koordinate  $r$  ausdrücken:

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 = \frac{\ell^2}{2mr^2} \ . \quad (\text{I.1.113})$$

Damit erhält die durch Gleichung (I.1.111) ausgedrückte Erhaltung der Gesamtenergie die neue Form

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2} = E \ . \quad (\text{I.1.114})$$

Das entspricht der Energieerhaltung für eine *eindimensionale* Bewegung in dem *effektiven Potential*

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2} \ , \quad (\text{I.1.115})$$

welches sich von dem gegebenen Potential  $V(r)$  um die so genannte *Drehimpulsbarriere*  $\ell^2/(2mr^2)$  unterscheidet. Hier wurde also die Drehimpulserhaltung ausgenutzt, um das ursprünglich zweidimensionale Problem auf ein eindimensionales zurückzuführen. Oder allgemeiner ausgedrückt: Es wurde ein Freiheitsgrad mit Hilfe einer Erhaltungsgröße eliminiert.

Die Diskussion der eindimensionalen Radialbewegung, die durch Gleichung (I.1.114) beschrieben wird, erlaubt nun bereits einige wichtige qualitative Aussagen. Angenommen, das Potential  $V(r)$  besitzt folgende typische Eigenschaften:

- (i) Es ist attraktiv, d.h.  $V(r) < 0$ ,
- (ii) es wird für  $r \rightarrow 0$  schwächer singulär als  $1/r^2$ ,
- (iii) es verschwindet für  $r \rightarrow \infty$  langsamer als  $1/r^2$ ;

das gilt z.B. für Potentiale der Form

$$V(r) = -\frac{c}{r^\alpha} \quad \text{mit} \quad 0 < \alpha < 2 \ , \quad (\text{I.1.116})$$

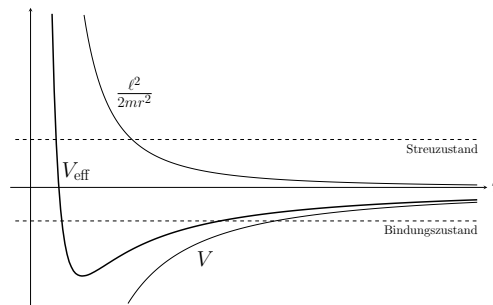


Abbildung I.4: *Das effektive Potential.* Für ein Zentralpotential  $V(r)$  der Form (I.1.116) und  $\ell \neq 0$  wird  $V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \ell^2/(2mr^2)$  für  $r \rightarrow 0$  durch die repulsive Drehimpulsbarriere dominiert, die jedoch für  $r \rightarrow \infty$  schneller verschwindet als  $V(r)$ . Das führt zur Ausbildung eines Minimums.

also insbesondere mit  $\alpha = 1$  für das Gravitations- und das Coulombpotential. Dann hat das effektive Potential die in Abbildung I.4 dargestellte Form: Für  $r \rightarrow 0$  wird es durch die repulsive Drehimpulsbarriere dominiert, die sich jedoch für  $r \rightarrow \infty$  weniger stark bemerkbar macht als  $V(r)$  selbst; folglich besitzt  $V_{\text{eff}}(r)$  ein Minimum mit negativer Energie.

Damit kann man auch *ohne* explizite Lösung der Bewegungsgleichung wichtige Eigenschaften der Lösungen erkennen:

- (a) Für  $E > 0$  (d.h. für „Streuzustände“) und  $\ell \neq 0$  kann ein aus dem Unendlichen kommendes Teilchen das Kraftzentrum nicht erreichen, sondern wird „an der Drehimpulsbarriere reflektiert“.
- (b) Für  $\min(V_{\text{eff}}) < E < 0$  (d.h. für „Bindungszustände“) und  $\ell \neq 0$  *oszilliert* die Radialkoordinate des Teilchens zwischen zwei durch  $E = V_{\text{eff}}$  bestimmte Radien  $r_{\text{min}}$  und  $r_{\text{max}}$  hin und her. Da gleichzeitig die Winkelkoordinate  $\varphi$  fortschreitet, ergeben sich so Rosettenbahnen um das Kraftzentrum; diese sind im Allgemeinen (d.h. von speziellen Ausnahmen abgesehen) *nicht* in sich geschlossen, wie in Abbildung I.5 skizziert.

Die explizite Bestimmung der Bahnkurven geht nun aus von der durch Gleichung (I.1.114) ausgedrückten Energieerhaltung: Diese liefert für die Radialkoordinate  $r(t)$  die Differentialgleichung

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m} \left( E - V(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right). \quad (\text{I.1.117})$$

Durch Trennung der Variablen erhält man daraus

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V(\rho) - \frac{\ell^2}{2m\rho^2} \right)}} \quad (\text{I.1.118})$$

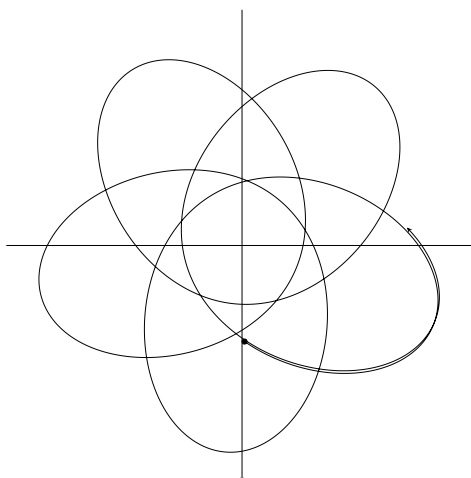


Abbildung I.5: *Gebundene Bewegung im Zentralpotential*. Da die Radialkoordinate des Teilchens in dem effektiven Potential zwischen zwei Radien  $r_{\min}$  und  $r_{\max}$  oszilliert, während gleichzeitig der Winkel  $\varphi$  fortschreitet, ergeben sich Rosettenbahnen um das Kraftzentrum. Nur für Potentiale der Form (I.1.116) mit  $\alpha = 1$  oder  $\alpha = -2$  (!) sind diese Bahnen in sich geschlossen.

mit geeigneten Konstanten  $t_0$  und  $r_0 = r(t_0)$ ; die Umkehrung dieser Beziehung  $t = t(r)$  liefert dann die Zeitabhängigkeit der Radialkoordinate,  $r = r(t)$ .

Aus der Drehimpulserhaltung  $mr^2\dot{\varphi} = \ell$  folgt weiter

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\ell}{mr^2} dt \\ &= \frac{\ell}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V(r) - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)}}, \end{aligned} \quad (\text{I.1.119})$$

so dass

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{\ell d\rho}{\rho^2 \sqrt{2m \left( E - V(\rho) - \frac{\ell^2}{2m\rho^2} \right)}} \quad (\text{I.1.120})$$

mit  $r(\varphi_0) = r_0$ . Umkehrung auch dieser Beziehung  $\varphi = \varphi(r)$  liefert die Winkelabhängigkeit  $r = r(\varphi)$  der Radialkoordinate; Einsetzen der oben gefundenen Lösung für  $r = r(t)$  dagegen die Zeitabhängigkeit des Azimutalwinkels,  $\varphi = \varphi(t)$ .

Damit ist gezeigt, dass die Lagrange-Gleichungen für die Bewegung in einem Zentralpotential *immer* formal gelöst (also „integriert“) werden können (wenn es auch vielleicht nicht möglich ist, die auftretenden Integrale durch elementare Funktionen auszudrücken). Allerdings wird auch deutlich, dass diese formale Einfachheit durch die Existenz der beiden Erhaltungsgrößen  $\ell$  und  $E$  bedingt wird. Diese Beobachtung und ähnliche andere Beispiele führen zu der folgenden, noch vorläufigen Definition:

*Ein mechanisches System mit  $f$  Freiheitsgraden heißt integrierbar, wenn es  $f$  voneinander unabhängige Erhaltungsgrößen besitzt.*

Ein Teilchen in einem Zentralpotential bildet daher ein Beispiel für ein *integrables System*. Was passiert aber, wenn ein System in diesem Sinne nicht integrabel ist, wenn man also z.B. die Bewegung in einem *nicht* radialsymmetrischen Potential  $V(r, \varphi)$  in einer Ebene betrachtet, so dass  $\varphi$  *keine* zyklische Variable und daher  $\ell$  *keine* Erhaltungsgröße mehr ist? Die Antwort auf diese naheliegende Frage ist überraschend kompliziert, weil in nicht-integrablen Systemen „chaotische“ Bewegungsformen auftreten, die prinzipiell andersartig sind als die „regulären“ Bahnen in integrablen Systemen: Dem russischen Mathematiker Vladimir Igorevich Arnol'd (1937 - 2010), der herausragend wichtige Beiträge zur Theoretischen Mechanik geleistet hat, wird der Ausspruch zugeschrieben, dass schon Systeme mit nur zwei Freiheitsgraden jenseits der heutigen Mathematik liegen! Von daher ist die Warnung angebracht, dass die in der Anfangsausbildung der Mechanik oft angeführten Beispiele integrierbarer Systeme für die Mechanik gerade *nicht* typisch sind.

Dennoch spielen diese „untypischen“ integrablen Systeme häufig eine ganz besondere Rolle, so dass ihre genaue Untersuchung nach wie vor wichtig ist. Das gilt auch für das folgende Paradebeispiel:

### (iii) Bewegung im $1/r$ -Potential

Eine kleine „Testmasse“  $m$  erfährt im Abstand  $r$  von einer sehr viel größeren Masse  $M$  das Gravitationspotential

$$V(r) = -G \frac{Mm}{r} \quad (\text{I.1.121})$$

mit der Gravitationskonstanten  $G = 6.673\,84(80) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg s}^2)$ . Dieses „ $1/r$ -Potential“ besitzt eine besondere Eigenschaft, so dass die zugehörige Bewegungsgleichung mit einem besonderen Kunstgriff gelöst werden kann. Ausgangspunkt ist wie üblich die Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r) = E. \quad (\text{I.1.122})$$

Führt man nun den inversen Radialabstand als neue Variable  $s$  ein, also

$$s = \frac{1}{r}, \quad (\text{I.1.123})$$

so gilt für deren Winkelabhängigkeit die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\varphi} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r} \right) \frac{dt}{d\varphi} \\ &= -\frac{\dot{r}}{r^2} \frac{1}{\dot{\varphi}} \\ &= -\frac{m\dot{r}}{\ell}, \end{aligned} \quad (\text{I.1.124})$$

so dass die Radialgeschwindigkeit die Form

$$\dot{r} = -\frac{\ell}{m} \frac{ds}{d\varphi} \quad (\text{I.1.125})$$

erhält. Setzt man das in die Energiegleichung (I.1.122) ein und verwendet die Notation  $V(1/s) = -GMms = \bar{V}(s)$ , ergibt sich daraus

$$\frac{\ell^2}{2m} \left[ \left( \frac{ds}{d\varphi} \right)^2 + s^2 \right] + \bar{V}(s) = E . \quad (\text{I.1.126})$$

Differentiation nach  $\varphi$  liefert nun

$$\frac{\ell^2}{2m} \left[ 2 \frac{ds}{d\varphi} \frac{d^2s}{d\varphi^2} + 2s \frac{ds}{d\varphi} \right] + \frac{d\bar{V}}{ds} \frac{ds}{d\varphi} = 0 , \quad (\text{I.1.127})$$

oder kürzer

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2} + s + \frac{m}{\ell^2} \frac{d\bar{V}}{ds} = 0 . \quad (\text{I.1.128})$$

Das ist eine inhomogene Schwingungsgleichung! Natürlich sind diese Schritte für jedes beliebige Zentralpotential durchführbar. Im Falle des Gravitationspotentials (I.1.121) wird diese Gleichung jedoch besonders einfach: Dann ist nämlich

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{V}}{ds} &= \frac{d}{ds}(-GMms) \\ &= -GMm \end{aligned} \quad (\text{I.1.129})$$

eine Konstante, und man hat

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2} + s = \frac{GMm^2}{\ell^2} . \quad (\text{I.1.130})$$

Das ist die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators (!) unter dem Einfluss einer konstanten äußeren Kraft, deren allgemeine Lösung mit Hilfe von zwei Integrationskonstanten  $A$  und  $B$  sofort angegeben werden kann:

$$s(\varphi) = A \sin \varphi + B \cos \varphi + \frac{GMm^2}{\ell^2} . \quad (\text{I.1.131})$$

Diese Parameter  $A$  und  $B$  werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Fordert man, dass der Winkel  $\varphi = 0$  zum *minimalen Abstand* vom Kraftzentrum gehört, dass also  $\varphi = 0$ , wenn  $s = 1/r$  maximal wird, hat man

$$\begin{aligned} \left. \frac{ds}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} &= (A \cos \varphi - B \sin \varphi)_{\varphi=0} \\ &= A \end{aligned} \quad (\text{I.1.132})$$

sowie

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2s}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} &= (-A \sin \varphi - B \cos \varphi)_{\varphi=0} \\ &= -B \end{aligned} \quad (\text{I.1.133})$$

und daher  $A = 0$  und  $B > 0$ . Die Bahnkurve eines „Teilchens“ im Gravitationspotential wird dann beschrieben durch die Gleichung

$$s(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)} = B \cos \varphi + \frac{GMm^2}{\ell^2} . \quad (\text{I.1.134})$$

Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} k &= \frac{\ell^2}{GMm^2} \\ \varepsilon &= kB \end{aligned} \quad (\text{I.1.135})$$

ist das genau die Standardform der Gleichung eines *Kegelschnittes* in ebenen Polarkoordinaten, nämlich

$$\frac{1}{r(\varphi)} = \frac{1}{k}(1 + \varepsilon \cos \varphi) . \quad (\text{I.1.136})$$

Der Typ des Schnittes wird dabei durch die Exzentrizität  $\varepsilon$  bestimmt:

$$\begin{aligned} \varepsilon = 0 & \text{ ergibt einen Kreis,} \\ 0 < \varepsilon < 1 & \text{ eine Ellipse,} \\ \varepsilon = 1 & \text{ eine Parabel,} \\ \varepsilon > 1 & \text{ eine Hyperbel.} \end{aligned}$$

Die Bahnen gebundener Bewegungen im  $1/r$ -Potential haben damit die Form einer *Ellipse* (mit der Kreisbahn als Sonderfall) und sind daher insbesondere in sich geschlossen, im Unterschied zu den Bahnen in allgemeinen Zentralkraftfeldern. Anstelle der Parameter  $k$  und  $\varepsilon$  verwendet man zur Charakterisierung einer Ellipse wie in Abbildung I.6 auch ihre große Halbachse  $a$  und ihre kleine Halbachse  $b$ ; man nennt den Abstand  $e = \varepsilon a$  eines ihrer Brennpunkte vom Mittelpunkt auch die numerische Exzentrizität.

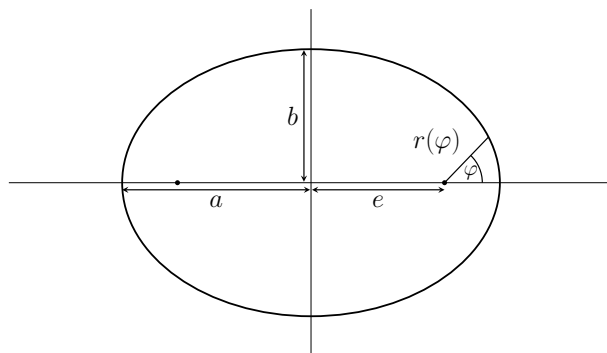


Abbildung I.6: *Kenngrößen einer Ellipse*. Eine Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Summe der Entfernungen von zwei „Brennpunkten“ konstant ist.

Aus der „Gärtnerkonstruktion“ (also aus der Tatsache, dass für jeden Punkt auf der Ellipse die Summe seiner Entfernungen von den beiden Brennpunkten konstant ist) folgt sofort, dass

$$2a = 2\sqrt{b^2 + e^2} , \quad (\text{I.1.137})$$

also

$$a^2 = b^2 + e^2 . \quad (\text{I.1.138})$$

Da der „Halbparameter“  $k$  nach der Kegelschnittgleichung (I.1.136) mit  $r(\pi/2)$  übereinstimmt, erhält man ebenso

$$2a = k + \sqrt{4e^2 + k^2} , \quad (\text{I.1.139})$$

und daraus

$$k = \frac{a^2 - e^2}{a} = \frac{b^2}{a} . \quad (\text{I.1.140})$$

Eine erste Gleichung zur Bestimmung der Halbachsen für die gebundene Bewegung im  $1/r$ -Potential ergibt sich aus der Energieerhaltung: Da  $r(\varphi)$  vereinbarungsgemäß für  $\varphi = 0$  minimal wird, ist  $\dot{r}(\varphi = 0) = 0$ ; außerdem gilt für den Bahnpunkt  $r(\varphi = 0) = r_0$  die Beziehung

$$r_0 = \frac{k}{1 + \varepsilon} = a - e . \quad (\text{I.1.141})$$

Die erhaltene Gesamtenergie (I.1.122) hat daher den Wert

$$\begin{aligned} E &= \frac{\ell^2}{2mr_0^2} - \frac{GMm}{r_0} \\ &= GMm \left( \frac{k}{2r_0^2} - \frac{1}{r_0} \right) , \end{aligned} \quad (\text{I.1.142})$$

wobei im zweiten Schritt die erste der beiden Gleichungen (I.1.135) für den Parameter  $k$  benutzt wurde. Da nun weiterhin

$$\begin{aligned} \frac{k}{2r_0^2} - \frac{1}{r_0} &= \frac{(a^2 - e^2)/a}{2(a - e)^2} - \frac{1}{a - e} \\ &= \frac{a^2 - e^2 - 2a(a - e)}{2a(a - e)^2} \\ &= \frac{-a^2 + 2ae - e^2}{2a(a - e)^2} \\ &= -\frac{1}{2a} , \end{aligned} \quad (\text{I.1.143})$$

findet man schließlich

$$E = -\frac{GMm}{2a} < 0 , \quad (\text{I.1.144})$$



so dass die große Halbachse durch die Energie festgelegt wird:

$$a = -\frac{GMm}{2E}. \quad (\text{I.1.145})$$

Die kleine Halbachse wird dagegen auch durch den Drehimpuls bestimmt: Mit Hilfe der Beziehung (I.1.140) ergibt sich

$$\begin{aligned} b^2 &= ka \\ &= \frac{\ell^2}{GMm^2} \left( \frac{-GMm}{2E} \right) \\ &= \frac{\ell^2}{2m(-E)}, \end{aligned} \quad (\text{I.1.146})$$

also

$$b = \frac{\ell}{\sqrt{2m(-E)}}. \quad (\text{I.1.147})$$

Hyperbelbahnen mit einer Exzentrizität  $\varepsilon > 1$  treten auf, wenn die „kleine“ Masse  $m$  nicht gebunden ist, also eine positive Energie  $E > 0$  besitzt. Sie entsprechen Streuprozessen, bei denen der Körper der Masse  $m$  aus dem Unendlichen kommt und durch die Wechselwirkung mit dem Kraftzentrum um einen „Streuwinkel“  $\vartheta$  gegenüber der Einfallsrichtung abgelenkt wird, wie in der Abbildung I.7 skizziert;  $\vartheta$  kann durch die Erhaltungsgrößen  $E$  und  $\ell$  ausgedrückt werden. (*Übungsaufgabe!*) Dieser Zusammenhang ist wichtig etwa für das Verständnis der Rutherford-Streuung von Alpha-Teilchen an Atomkernen.

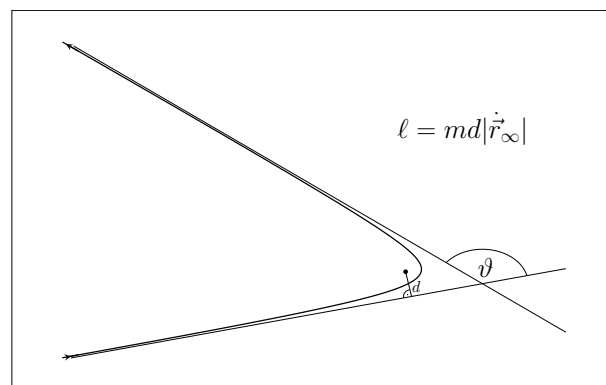


Abbildung I.7: *Potentialstreuung*. Ein Teilchen läuft aus dem Unendlichen auf ein Kraftzentrum zu und wird durch die Wechselwirkung um einen Winkel  $\vartheta$  abgelenkt. Dabei bestimmt der *Stoßparameter*  $d$  (also der Abstand, in dem das Teilchen an dem Kraftzentrum vorbeilaufen würde, wenn es nicht gestreut würde) den Drehimpuls über die Beziehung  $\ell = md|\vec{r}_\infty|$ .

### I.1.5 Invarianzen und Erhaltungsgrößen

Das Beispiel der Bewegung eines Teilchens im Zentralpotential verdeutlicht die überragende Rolle von Erhaltungsgrößen für die Lösung der Bewegungsgleichungen: Jede Erhaltungsgröße reduziert die Zahl der „effektiven“ Freiheitsgrade um eins; hat man also genausoviele Erhaltungsgrößen gefunden wie ein System Freiheitsgrade besitzt, ist seine Bewegung „im Prinzip“ verstanden. Weiterhin ist bereits bekannt, dass eine zyklische Koordinate eine Erhaltungsgröße anzeigt: Ist  $q$  zyklisch, d.h. hängt die Lagrange-Funktion  $L$  nicht von  $q$  ab, so ist  $\partial L/\partial \dot{q}$  „erhalten“. Diese Tatsache deutet einen Zusammenhang zwischen Erhaltungsgrößen und Invarianzen an: Wenn  $L$  nicht von  $q$  abhängt, bleibt das System unter einer Veränderung von  $q$  invariant. Es gibt jedoch auch Invarianzen, die *nicht* schon durch die Zyklizität einer Koordinate sichtbar werden. So ist die Lagrange-Funktion eines wechselwirkenden Zweiteilchensystems von der Form

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{r}}_2^2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad (\text{I.1.148})$$

und damit abhängig sowohl von  $\vec{r}_1$  als auch von  $\vec{r}_2$ , so dass  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  für sich genommen nicht zyklisch sind. Dennoch bleibt  $L$  invariant unter einer *gemeinsamen* Verschiebung beider Vektoren, d.h. unter einer Operation

$$\begin{cases} \vec{r}_1 & \rightarrow \vec{r}_1 + \alpha \vec{e} \\ \vec{r}_2 & \rightarrow \vec{r}_2 + \alpha \vec{e} \end{cases} , \quad (\text{I.1.149})$$

wobei  $\vec{e}$  ein beliebiger Richtungsvektor und  $\alpha$  ein stetig veränderbarer Parameter ist; wie später deutlich werden wird, bedingt diese Translationsinvarianz des Gesamtsystems die Erhaltung seines Gesamtimpulses. In Verallgemeinerung dieses Beispiels sei nun

$$q(t) = (q_1(t), \dots, q_f(t)) \quad (\text{I.1.150})$$

eine Bahnkurve eines Systems mit  $f$  Freiheitsgraden, die in stetiger Weise so deformiert (z.B. verschoben) werden kann, dass seine Lagrange-Funktion unter dieser Operation invariant bleibt. Beschreibt man nun die „Stärke“ der Deformation mit Hilfe eines reellen Parameters  $\alpha$  und betrachtet wie in Abbildung I.8 eine Schar  $q(t, \alpha)$  von Bahnkurven mit der Eigenschaft

$$q(t, 0) = q(t) , \quad (\text{I.1.151})$$

so darf die Lagrange-Funktion  $L$  nicht von  $\alpha$  abhängen:

$$L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t) . \quad (\text{I.1.152})$$

Dann hat man natürlich

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) \right|_{\alpha=0} = 0 ; \quad (\text{I.1.153})$$

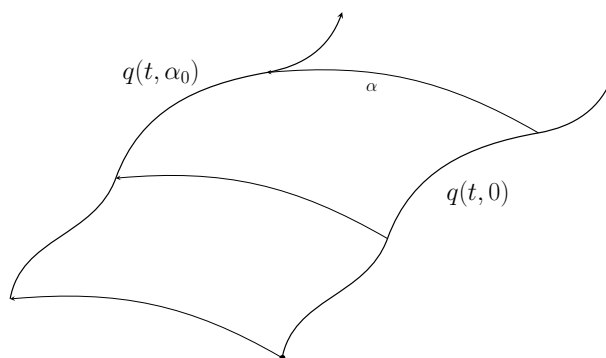


Abbildung I.8: *Deformation einer Bahnkurve*. Eine Lösung  $q(t, 0)$  der Bewegungsgleichungen wird stetig derart verändert, dass man für beliebige Stärke  $\alpha$  der Deformation wieder eine Lösung  $q(t, \alpha)$  erhält; diese Symmetrieeigenschaft wird durch die Invarianz (I.1.152) der Lagrange-Funktion ermöglicht.

daraus folgt

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{k=1}^f \left[ \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} \\
 &= \sum_{k=1}^f \left[ \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} \\
 &= \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} .
 \end{aligned} \tag{I.1.154}$$

Hier wurden im zweiten Schritt die Lagrange-Gleichungen sowie wieder einmal die wichtige Identität (I.1.61) ausgenutzt, so dass eine Erhaltungsgröße sichtbar wird.

Damit hat man eine spezielle Form einer allgemeinen und sehr weitreichenden Aussage gefunden, die 1918 von der Mathematikerin Emmy Noether formuliert wurde und als *Noether-Theorem* bekannt ist:

*Wenn eine Lagrange-Funktion  $L(q, \dot{q}, t)$  invariant bleibt, während eine darin eingesetzte Lösung  $q(t)$  ihrer Bewegungsgleichungen gemäß einer Symmetrietransformation*

$$q_k(t) \rightarrow q_k(t, \alpha) \quad , \quad k = 1, \dots, f$$

*kontinuierlich in andere Lösungen überführt wird, so dass*

$$L(q(t), \dot{q}(t), t) = L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) ,$$

*dann ist*

$$Q = \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \tau_k \tag{I.1.155}$$

mit

$$\tau_k = \left. \frac{\partial q_k}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0}$$

eine Erhaltungsgröße.

Eine Randbemerkung für die Feinschmecker: Die Ableitungen  $\tau_k$  bilden offensichtlich die Komponenten eines Tangentialvektors  $\tau$ . Damit entsprechen die Größen  $\partial L / \partial \dot{q}_k$  den Komponenten eines Kotangentialvektors, denn der Ausdruck (I.1.155) für die so genannte „Noether-Ladung“  $Q$  kann als Skalarprodukt aufgefasst werden, genauer als die Anwendung einer Linearform auf  $\tau$ . Damit ist  $\partial L / \partial \dot{q}$  ein Element aus dem Dualraum des Vektorraumes, aus dem  $\tau$  stammt.

Die Bedeutung dieser abstrakt-allgemeinen Überlegungen soll nun für einige besonders wichtige konkrete Fälle herausgearbeitet werden.

### (i) Invarianz unter Translationen

Zurück zum Eingangsbeispiel. Angenommen, ein System aus  $N$  Teilchen ist invariant unter *Translationen*, also unter Verschiebungen des Gesamtsystems, wobei der Einheitsvektor  $\vec{e}$  die Richtung der Verschiebung und der kontinuierlich einstellbare Parameter  $\alpha$  ihre Größe angeben soll:

$$\vec{r}_i(t) \rightarrow \vec{r}_i(t, \alpha) = \vec{r}_i(t) + \alpha \vec{e} \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad . \quad (\text{I.1.156})$$

Eine solche Translationsinvarianz liegt etwa dann vor, wenn keine äußeren Kräfte auf das System einwirken und das „innere“ Wechselwirkungspotential nur von den Verbindungsvektoren  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$  der Teilchen abhängt, nicht jedoch von den Positionen der einzelnen Teilchen selbst. Dann hat man eine Lagrange-Funktion der Form

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\dots, \vec{r}_i - \vec{r}_j, \dots) \quad (\text{I.1.157})$$

sowie die Tangentialvektoren

$$\vec{\tau}_i = \left. \frac{\partial \vec{r}_i(t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \vec{e} \quad , \quad (\text{I.1.158})$$

so dass die zugehörige Erhaltungsgröße (I.1.155) sofort angegeben werden kann:

$$Q = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \vec{e} = \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \right) \cdot \vec{e} = \vec{P} \cdot \vec{e} \quad . \quad (\text{I.1.159})$$

Das ist die Projektion des Vektors  $\vec{P}$  des Gesamtimpulses auf den Richtungsvektor  $\vec{e}$  der Translation, also die Komponente von  $\vec{P}$  in Richtung von  $\vec{e}$ . Ist das System sogar unter Verschiebungen in beliebige Richtungen invariant, wie es in dem Beispiel (I.1.157) der Fall ist, sind folglich *alle* Komponenten des Gesamtimpulses erhalten. Damit ist die Erhaltung

des Gesamtimpulses eines Systems, das nur inneren Kräften unterliegt, eine Konsequenz seiner Translationsinvarianz.

### (ii) Invarianz unter Rotationen

Drehungen eines Teilchens um einen Winkel  $\alpha$  um die  $z$ -Achse werden beschrieben durch die Anwendung der zugehörigen „Drehmatrix“ auf seinen ursprünglichen Ortsvektor:

$$\vec{r}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (\text{I.1.160})$$

Damit hat man

$$\vec{\tau} = \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{e}_z \times \vec{r}; \quad (\text{I.1.161})$$

falls die Drehachse in eine beliebige Richtung  $\vec{e}$  gelegt wird, gilt entsprechend

$$\left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \vec{e} \times \vec{r}. \quad (\text{I.1.162})$$

Betrachtet wird nun ein  $N$ -Teilchen-System, das unter solchen Rotationen invariant sein soll. Das ist dann gewährleistet, wenn die Kräfte, die die Teilchen aufeinander ausüben, nur von ihren Abständen abhängen, wenn also

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\dots, |\vec{r}_i - \vec{r}_j|, \dots), \quad (\text{I.1.163})$$

weil diese Abstände durch eine gemeinsame Drehung aller Teilchen nicht geändert werden. Dann wird die Erhaltungsgröße, die aus der vorausgesetzten Rotationsinvarianz des Systems folgt, gegeben durch

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot (\vec{e} \times \vec{r}_i) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot (\vec{e} \times \vec{r}_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \vec{e} \cdot (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) \\ &= \vec{e} \cdot \vec{\ell}, \end{aligned} \quad (\text{I.1.164})$$

wobei hier

$$\vec{\ell} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (\text{I.1.165})$$

den gesamten Drehimpuls des Systems bezeichnet. Ist also ein System invariant unter Rotationen um eine gegebene Achse, ist die zugehörige Komponente des Gesamtdrehimpulses erhalten; ist das System sogar invariant unter beliebigen Drehungen, ist jede Komponente des Drehimpulsvektors eine Erhaltungsgröße.

### (iii) Invarianz unter Zeitverschiebungen

Die formale Konstruktion der Erhaltungsgröße  $Q$  lässt eine interessante Verallgemeinerung zu: Falls  $L$  nicht selbst invariant ist, sondern die vorherige Gleichung (I.1.153) durch

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t, \alpha), \dot{q}(t, \alpha), t) \right|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} g(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (\text{I.1.166})$$

mit einer geeigneten Funktion  $g(q, \dot{q}, t)$  zu ersetzen ist, so ist offenbar die Größe

$$Q' = \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \tau_k - g(q, \dot{q}, t) \quad (\text{I.1.167})$$

„erhalten“. Ihre wohl mit Abstand wichtigste Anwendung findet diese Beobachtung bei „Invarianz unter Zeitverschiebung“, wenn also das System ausgehend von gleichen Anfangsbedingungen  $q(t_0)$ ,  $\dot{q}(t_0)$ , die zu verschiedenen Zeiten  $t_0$  vorliegen, stets die gleiche Bahnkurve durchläuft. Mit der vorherigen Notation wird eine solche Verschiebung in der Zeit beschrieben durch

$$q(t, \alpha) = q(t + \alpha), \quad (\text{I.1.168})$$

so dass

$$\tau = \left. \frac{\partial q}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \dot{q}. \quad (\text{I.1.169})$$

Damit findet man nun

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t + \alpha), \dot{q}(t + \alpha), t) \right|_{\alpha=0} = \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right)_{\alpha=0}; \quad (\text{I.1.170})$$

andererseits gilt

$$\frac{d}{dt} L(q, \dot{q}, t) = \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (\text{I.1.171})$$

Sofern also die Lagrange-Funktion *nicht explizit* zeitabhängig ist, so dass  $\partial L / \partial t = 0$ , hat man eine Gleichung der verlangten Form (I.1.166), wobei hier  $L$  selbst die Rolle der Funktion  $g$  übernimmt:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \alpha} L(q(t + \alpha), \dot{q}(t + \alpha)) \right|_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} L(q(t), \dot{q}(t)); \quad (\text{I.1.172})$$

die zugehörige Erhaltungsgröße (I.1.167) ist daher

$$Q' = \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L(q, \dot{q}) . \quad (\text{I.1.173})$$

In kartesischen Koordinaten ist die Bedeutung dieser Erhaltungsgröße sofort zu erkennen. Dann hat man

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) , \quad (\text{I.1.174})$$

wobei hier zusätzlich angenommen wird, dass kein geschwindigkeitsabhängiges generalisiertes Potential vorliegt, so dass

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \dot{\vec{r}}_i - L \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + U \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + U \\ &= T + U = E ; \end{aligned} \quad (\text{I.1.175})$$

die Erhaltungsgröße (I.1.173) liefert also die Gesamtenergie des  $N$ -Teilchen-Systems. Das gilt auch für den Fall, dass Zwangsbedingungen vorliegen und die Systembewegung durch generalisierte Koordinaten beschrieben wird: Dann geht man aus von einer Parametrisierung

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_f) \quad (\text{I.1.176})$$

und findet

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{j,k=1}^f \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^f g_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k , \end{aligned} \quad (\text{I.1.177})$$

wobei die hier eingeführte „Massenmatrix“

$$g_{jk} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (\text{I.1.178})$$

offensichtlich symmetrisch ist. Sofern das Potential  $U$  nicht von den generalisierten Geschwindigkeiten abhängt, folgt dann

$$\sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \sum_{j,k=1}^f g_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = 2T, \quad (\text{I.1.179})$$

und damit wie vorher

$$\begin{aligned} Q' &= \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \\ &= 2T - (T - U) \\ &= T + U = E. \end{aligned} \quad (\text{I.1.180})$$

Die Energieerhaltung eines „autonomen“ Systems, also eines Systems, dessen Lagrange-Funktion nicht explizit zeitabhängig ist, ist daher eine Konsequenz seiner Invarianz unter Verschiebungen in der Zeit.

#### (iv) Invarianz unter Galilei-Transformationen

Eine Galilei-Transformation der Form

$$\vec{r}_i(t, \alpha) = \vec{r}_i(t) + \alpha \vec{v} t, \quad (\text{I.1.181})$$

wobei der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  konstant ist, leistet die Umrechnung der Koordinaten eines Systems in die eines anderen, das sich relativ zum ersten geradlinig-gleichförmig bewegt. Dann ist zunächst

$$\left. \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \vec{v} t. \quad (\text{I.1.182})$$

Sofern nun das Potential  $U$  translationsinvariant ist und sich daher auch unter einer Galilei-Transformation nicht ändert, erhält man eine transformierte Lagrange-Funktion

$$L(\vec{r}_1(t, \alpha), \dots, \vec{r}_N(t, \alpha), t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\vec{r}}_i + \alpha \vec{v})^2 - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t). \quad (\text{I.1.183})$$

Folglich findet man auch in diesem Fall eine Beziehung der Form (I.1.166), nämlich

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left( \vec{v} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right), \quad (\text{I.1.184})$$

und kann sofort eine Erhaltungsgröße (I.1.167) angeben:

$$\begin{aligned} Q' &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \vec{v} t - \vec{v} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{v} t - \vec{v} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \\ &= \vec{v} \cdot (\vec{P} t - M \vec{R}). \end{aligned} \quad (\text{I.1.185})$$



Dabei bezeichnet

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (\text{I.1.186})$$

die Gesamtmasse,

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \quad (\text{I.1.187})$$

den Gesamtimpuls, und

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (\text{I.1.188})$$

den Schwerpunktsvektor. Damit diese Größe (I.1.185) erhalten ist, muss  $\vec{P}t - M\vec{R}$  ein konstanter Vektor sein; daraus folgt

$$\vec{R}(t) = \frac{1}{M} \vec{P}t + \vec{R}_0. \quad (\text{I.1.189})$$

Der Schwerpunktsvektor eines Systems mit translationsinvariantem Potential bewegt sich daher geradlinig-gleichförmig.

Interessant sind an dieser Stelle weniger die gewonnenen vier Erhaltungssätze (I.1.159), (I.1.164), (I.1.180) und (I.1.189) als solche, da diese ausnahmslos bereits wohlbekannt sind; interessant ist vielmehr die Art und Weise, wie die verschiedenen Erhaltungsgrößen hier aus einem einzigen, „übergeordneten“ Prinzip erschlossen werden konnten, nämlich aus dem Noether-Theorem. Dieses technisch anmutende Theorem kann noch in eine kurze und einprägsame Form gebracht werden. Denn die Operationen, unter denen eine gegebene Lagrange-Funktion invariant bleibt, bilden häufig eine kontinuierliche Symmetriegruppe: Für ein translationsinvariantes System in  $n$  Raumdimensionen die Translationsgruppe  $T(n)$ , für ein rotationsinvariantes System in  $n$  Raumdimensionen die spezielle orthogonale Gruppe  $SO(n)$ , usw. Die Gruppenelemente werden dann charakterisiert durch eine gewisse Zahl von Parametern (z.B. die Längen der Verschiebungsstrecken in  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung oder die Drehwinkel), von denen jeder die Rolle des kontinuierlichen Parameters  $\alpha$  bei der Konstruktion der Erhaltungsgrößen  $Q$  oder  $Q'$  spielen kann. Daher kann das Noether-Theorem auch wie folgt formuliert werden:

*Ist die Lagrange-Funktion eines Systems invariant unter einer  $n$ -parametrischen Symmetriegruppe, besitzt dieses System (mindestens)  $n$  Erhaltungsgrößen.*

Der durch das Noether-Theorem ausgedrückte Zusammenhang zwischen Symmetrien und Erhaltungsgrößen spielt insbesondere auch in der Teilchenphysik eine wichtige Rolle. Die dort betrachteten Symmetrien beziehen sich allerdings nicht mehr auf den Anschauungsraum!

## I.2 Hamiltonsche Mechanik

Die Lagrange-Gleichungen zweiter Art eines mechanischen Systems mit  $f$  Freiheitsgraden, also

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad ; \quad k = 1, \dots, f ,$$

bilden ein System von  $f$  gekoppelten Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung für die gesuchten Bahnkurven

$$q(t) = (q_1(t), \dots, q_f(t)) .$$

Der Umstand, dass die Lagrange-Funktion  $L = L(q, \dot{q}, t)$  nicht nur von den „generalisierten Koordinaten“  $q$ , sondern auch von den „generalisierten Geschwindigkeiten“  $\dot{q}$  abhängt, lässt erkennen, dass der Lagrange-Formalismus eine *tangentiale* Formulierung der Mechanik bildet. Dabei sind die tangentialen Größen, also die generalisierten Geschwindigkeiten, *nicht unabhängig*, sondern im wahrsten Sinne des Wortes von den generalisierten Koordinaten abgeleitet. Das geometrische Objekt, auf das sich der Begriff „tangential“ bezieht, ist die in den Konfigurationsraum eingebettete Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}_t$ , die durch die Zwangsbedingungen definiert und durch die generalisierten Koordinaten parametrisiert wird.

Während die „Lagrange-Mechanik“ durch Zwangsbedingungen und Zwangskräfte motiviert werden konnte, hat die nun zu entwickelnde Hamiltonsche Formulierung der Mechanik eine ganz andere Zielrichtung, die an dieser Stelle nur sehr unvollkommen umrissen werden kann. Sie „lebt“ in einem  $2f$ -dimensionalen *Phasenraum*, der von den  $f$  generalisierten Koordinaten  $q$  und weiteren  $f$  *generalisierten Impulsen*  $p$  aufgespannt wird. Dabei ist von entscheidender Bedeutung, dass diese generalisierten Impulse *nicht* durch Ableitung der Koordinatenbahnen entstehen, sondern von diesen unabhängig sind und daher auch unabhängig von diesen variiert werden können. Dadurch erhält man neben den schon bekannten „Punkttransformationen“, die nur im  $q$ -Raum wirken, eine noch größere Klasse von so genannten *kanonischen Transformationen*, die auf dem gesamten  $(p, q)$ -Phasenraum operieren und den eigentlichen „Mehrwert“ der Hamiltonschen Mechanik gegenüber der Lagrange-Formulierung ausmachen.<sup>8</sup>

Die Hamiltonsche Formulierung zeigt, dass die klassische Mechanik an der Nahtstelle zweier mächtiger mathematischer Disziplinen angesiedelt ist, nämlich der Differentialgeometrie und der Theorie dynamischer Systeme. Darüber hinaus ist sie von großer Bedeutung für das Verständnis der klassisch-quantenmechanischen Korrespondenz!

### I.2.1 Hamilton-Funktion und Hamiltonsche Gleichungen

In einem ersten Schritt sollen nun die „generalisierten Geschwindigkeiten“ eliminiert werden. Dazu zunächst eine Vorüberlegung:

<sup>8</sup>Diese kanonischen Transformationen können allerdings in der vorliegenden Einführung nicht behandelt werden; sie bilden einen Teil des Stoffes der weiterführenden Vorlesung „Teilchen und Felder II“.

Gegeben ist eine Funktion  $y$  einer reellen Variablen  $x$ ; anstelle der unabhängigen Variablen  $x$  soll diese Funktion nun durch die neue Variable  $\xi = dy/dx$ , also durch die Steigung ihres Graphen bei  $x$  beschrieben werden.

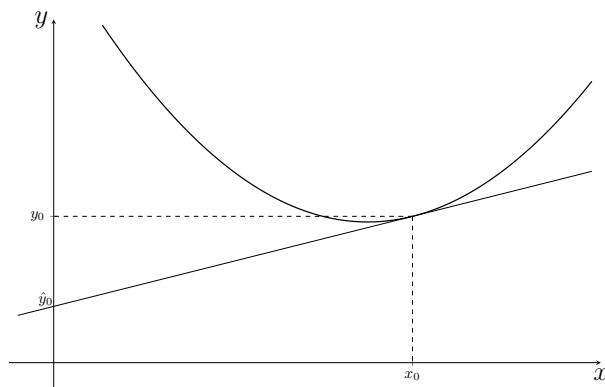


Abbildung I.9: Die Legendre-Transformation. Die Funktion  $y = y(x)$  soll beschrieben werden, indem für jeden Punkt  $x_0$  die Steigung  $\xi_0 = dy/dx|_{x_0}$  als unabhängiges Argument verwendet wird. Um dann den Graphen der Funktion und damit die Funktion selbst eindeutig rekonstruieren zu können, benötigt man neben der Steigung  $\xi_0$  noch den Achsenabschnitt  $\hat{y}_0$  der Tangente bei  $x_0$ .

Dazu ist zunächst zu fordern, dass die Funktion  $\xi(x) = dy(x)/dx$  eindeutig nach  $x$  aufgelöst werden kann: Es darf nicht an zwei Stellen  $x$  die gleiche Steigung auftreten; der Graph der Funktion  $y = y(x)$  muss also *konvex* oder *konkav* sein. Unter dieser Voraussetzung kann das „alte“ Argument  $x$  als Funktion des „neuen“ dargestellt werden:  $x = x(\xi)$ . Nun gehören zur Festlegung eines Punktes  $(x_0, y_0)$  auf dem Graphen von  $y$  zwei Angaben (nämlich die von  $x_0$  und von  $y_0$ ). Entsprechend benötigt man neben der Angabe einer Steigung  $\xi_0 = dy/dx|_{x_0}$  des Graphen bei  $x_0$  noch eine weitere: Dazu wählt man den Achsenabschnitt  $\hat{y}_0$ , den eine Tangente mit der Steigung  $\xi_0$  an den Graphen von  $y$  besitzt, wie in der Abbildung I.9 skizziert. Dann ist

$$\xi_0 = \frac{y_0 - \hat{y}_0}{x_0 - 0} \quad (\text{I.2.1})$$

oder

$$\hat{y}_0 = y_0 - \xi_0 x_0 . \quad (\text{I.2.2})$$

Die in Abhängigkeit von der Steigung betrachtete „Achsenabschnittsfunktion“

$$\hat{y}(\xi) = y(x(\xi)) - \xi x(\xi) \quad (\text{I.2.3})$$

heißt *Legendre-Transformierte* von  $y(x)$ . Man beachte, dass bei dieser Transformation keine Information über den Graphen von  $y$  (und damit über die Funktion selbst) verloren geht: Er wird nun nicht mehr beschrieben durch die Gesamtheit der Punkte  $(x_0, y_0)$ ,

sondern als Einhüllende seiner Tangenten. Damit ermöglicht die Legendre-Transformation einen Wechsel der unabhängigen Variablen ohne Informationsverlust; diese Tatsache ist insbesondere auch in der Thermodynamik von großer Bedeutung.

Als Muster für die Durchführung einer Legendre-Transformation dient das folgende Beispiel:

Sei  $f(x) = a e^{bx}$ , wobei  $a > 0$  und  $b > 0$  vorausgesetzt wird. Dann ist  $f$  streng konvex, also „Legendre-transformierbar“, so dass die Transformation in drei Schritten abläuft:

- Neue Variable:

$$f'(x) = ab e^{bx} \equiv \xi(x) .$$

- Inversion:

$$x(\xi) = \frac{1}{b} \ln \frac{\xi}{ab} .$$

- Legendre-Transformierte:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= f(x(\xi)) - \xi x(\xi) \\ &= \frac{\xi}{b} - \frac{\xi}{b} \ln \frac{\xi}{ab} . \end{aligned}$$

Diese Legendre-Transformation wird nun verwendet, um für alle Punkte  $(q_1, \dots, q_f)$  die unerwünschten generalisierten Geschwindigkeiten durch „bessere“ neue Variablen zu ersetzen, nämlich durch die partiellen Ableitungen der gegebenen Lagrange-Funktion  $L(q, \dot{q}, t)$  nach den alten Variablen  $\dot{q}$ . Die neuen Variablen sind also die Größen

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad ; \quad k = 1, \dots, f ; \quad (\text{I.2.4})$$

diese Größen werden als *kanonische Impulsvariablen* (kurz: *kanonische Impulse*) bezeichnet. Betrachtet man eine „typische“ Lagrange-Funktion der Form

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) , \quad (\text{I.2.5})$$

so ist

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m_i \dot{\vec{r}}_i ; \quad (\text{I.2.6})$$

die kanonischen Impulse stimmen hier also mit den üblichen mechanischen Impulsen der Teilchen überein. Das ist jedoch nicht immer der Fall:

Die Lagrange-Funktion eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld lautet bekanntlich

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - e\Phi(\vec{r}, t) + e\vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \dot{\vec{r}} , \quad (\text{I.2.7})$$

wie schon in Abschnitt I.1.4 festgestellt wurde. Damit hat man nun

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m\dot{\vec{r}} + e\vec{A}(\vec{r}, t), \quad (\text{I.2.8})$$

so dass hier der kanonische Impuls  $\vec{p} = m\dot{\vec{r}} + e\vec{A}(\vec{r}, t)$  sorgsam von dem mechanischen Impuls  $\vec{p}_{\text{mech}} = m\dot{\vec{r}}$  des Teilchens zu unterscheiden ist!

Noch eine linguistische Randbemerkung: Das Wort „kanonisch“, das in der Hamiltonschen Mechanik in fast schon inflationärer Weise verwendet wird, bedeutet „der Norm entsprechend“ oder „gemeinhin als richtig angesehen“. Wieso aber ein kanonischer Impuls „richtiger“ sein kann als ein mechanischer, obwohl er in dem obigen Beispiel noch nicht einmal eichinvariant ist, wird erst sehr viel später deutlich werden.

Hat man nun  $p_k = p_k(q, \dot{q})$  für eine gegebene Lagrange-Funktion berechnet, verlangt die Legendre-Transformation als nächsten Schritt die Inversion dieser Beziehungen, also ihre Auflösung nach den „alten“ Variablen  $\dot{q}_k = \dot{q}_k(p, q)$ . Danach erhält man im dritten Schritt die Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion bzgl. der generalisierten Geschwindigkeiten in der Form

$$\widehat{L}(p, q, t) = L(q, \dot{q}(p, q), t) - \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k(p, q). \quad (\text{I.2.9})$$

Allerdings verwendet man in der Theoretischen Mechanik nicht diese genau nach Schema konstruierte Legendre-Transformierte  $\widehat{L}$ , sondern ihr negatives, also  $-\widehat{L}$ : Die *negative* Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion bzgl. der generalisierten Geschwindigkeiten wird als *Hamilton-Funktion* bezeichnet,

$$H(p, q, t) = \sum_{k=1}^f p_k \dot{q}_k(p, q) - L(q, \dot{q}(p, q), t). \quad (\text{I.2.10})$$

Diese Wahl des Vorzeichens ist lediglich eine Frage der Konvention (also nicht etwa „physikalisch zwingend“), hat aber einen guten Grund: Für den Fall, dass eine Lagrange-Funktion  $L(q, \dot{q})$  nicht explizit von der Zeit abhängt, ist nach Gleichung (I.1.173) die Größe

$$Q' = \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L(q, \dot{q}) \quad (\text{I.2.11})$$

eine Erhaltungsgröße; aufgrund der Definition (I.2.4) der kanonischen Impulsvariablen stimmt diese Größe mit dem Wert überein, den die Hamilton-Funktion längs der Bahnkurve des Systems annimmt. Unter der weiteren Voraussetzung, dass das zugehörige Potential nicht „generalisiert“, also nicht geschwindigkeitsabhängig ist, konnte diese Erhaltungsgröße bereits in Gleichung (I.1.175) als Gesamtenergie  $E$  des Systems identifiziert werden:

*Ist eine Hamilton-Funktion  $H(p, q)$  nicht explizit zeitabhängig, so ist sie eine Erhaltungsgröße; ist das darin auftretende Potential nicht geschwindigkeitsabhängig, stimmt diese Erhaltungsgröße mit der Gesamtenergie des Systems überein.*

Aus der Definition (I.2.10) der Hamilton-Funktion erhält man nun sofort

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p_j} &= \dot{q}_j(p, q) + \sum_{k=1}^f \left( p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial p_j} \right) \\ &= \dot{q}_j(p, q),\end{aligned}\tag{I.2.12}$$

da ja  $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$ , und ebenso

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q_j} &= \sum_{k=1}^f p_k \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{k=1}^f \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial q_j} \\ &= -\frac{\partial L}{\partial q_j} \\ &= -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \\ &= -\dot{p}_j(p, q),\end{aligned}\tag{I.2.13}$$

wobei im dritten Schritt die als gültig vorausgesetzten Lagrange-Gleichungen benutzt wurden. Damit sind die hier gefundenen *Hamiltonschen Gleichungen*,

$$\begin{aligned}\dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k},\end{aligned}\tag{I.2.14}$$

die häufig auch als *kanonische Gleichungen* bezeichnet werden, eine Konsequenz der Lagrange-Gleichungen zweiter Art. Setzt man andererseits diese Hamiltonschen Gleichungen (I.2.14) voraus und benutzt die Umkehrung

$$L(q, \dot{q}, t) = \sum_{k=1}^f p_k(q, \dot{q}) \dot{q}_k - H(p(q, \dot{q}), q, t),\tag{I.2.15}$$

so ergeben sich die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial q_j} &= \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial p_k}{\partial q_j} \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial q_j} \right) - \frac{\partial H}{\partial q_j} \\ &= -\frac{\partial H}{\partial q_j}\end{aligned}\tag{I.2.16}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} &= p_j + \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial \dot{q}_j} \right) \\ &= p_j,\end{aligned}\tag{I.2.17}$$

und damit auch die Identitäten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j}. \quad (\text{I.2.18})$$

Somit sind nun die Lagrange-Gleichungen eine Konsequenz der Hamiltonschen Gleichungen. Damit hat man das folgende Fazit:

*Die 2f Hamiltonschen Gleichungen erster Ordnung,*

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k},$$

*sind formal äquivalent zu den f Lagrange-Gleichungen zweiter Ordnung,*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0,$$

*wobei  $k = 1, \dots, f$ .*

Die Hamilton-Funktion  $H = H(p, q, t)$  eines mechanischen Systems mit  $f$  Freiheitsgraden ist also definiert auf einem  $2f$ -dimensionalen Raum, der von den voneinander unabhängigen generalisierten Impulsen und Koordinaten gebildet und als *Phasenraum* bezeichnet wird. Unter einer „Phase“ eines mechanischen Systems versteht man seinen momentanen Zustand, der vollständig durch einen „Phasenraumpunkt“

$$(p, q) = (p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f) \quad (\text{I.2.19})$$

beschrieben wird. Die Zeitentwicklung eines Systems entspricht dann einer *Phasenraumtrajektorie*

$$t \mapsto (p_1(t), \dots, p_f(t), q_1(t), \dots, q_f(t)), \quad (\text{I.2.20})$$

die sich als Lösung der Hamiltonschen Gleichungen für eine gegebene Anfangsbedingung  $(p(t_0), q(t_0))$  ergibt. Die Zahl der insgesamt benötigten Anfangsdaten, nämlich  $2f$ , entspricht natürlich genau dem „Informationsbedarf“ der Lagrange-Gleichungen, für die man Anfangsbedingungen in der Form  $(q(t_0), \dot{q}(t_0))$  benötigt. Die Einführung des  $(p, q)$ -Phasenraums liefert gegenüber dem  $q$ -Parameterraum der Lagrange-Mechanik einen sehr wichtigen Vorteil:

*Nach dem Existenz- und Eindeutigkeitsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen verläuft durch jeden Phasenraumpunkt genau eine Trajektorie, d.h. genau eine Lösung der Bewegungsgleichungen.*

Das ist *nicht* der Fall, wenn man sich auf den  $q$ -Raum beschränkt: Durch einen Punkt des Konfigurationsraumes können mehrere Bahnkurven laufen.

Die bisherigen Strukturüberlegungen zur Hamiltonschen Mechanik werden durch das folgende einfache, aber sehr wichtige Modellsystem in paradigmatischer Weise verdeutlicht.

■ **Beispiel:** Der harmonische Oszillator

Die Lagrange-Funktion eines eindimensionalen harmonischen Oszillators mit der Masse  $m$  und der Kreisfrequenz  $\omega$  lautet

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2q^2 ; \quad (\text{I.2.21})$$

daraus ergibt sich die bekannte Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\ddot{q} = \frac{\partial L}{\partial q} = -m\omega^2q , \quad (\text{I.2.22})$$

also

$$\ddot{q} = -\omega^2q . \quad (\text{I.2.23})$$

Die Legendre-Transformation zur Berechnung der Hamilton-Funktion verlangt den bekannten Dreischritt:

- Bestimmung des kanonischen Impulses als der neuen Variablen:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} . \quad (\text{I.2.24})$$

- Inversion:

$$\dot{q}(p) = \frac{p}{m} . \quad (\text{I.2.25})$$

- Einsetzen in die Bestimmungsgleichung (I.2.10):

$$\begin{aligned} H(p, q) &= p\dot{q}(p) - L(q, \dot{q}(p)) \\ &= p\frac{p}{m} - \left[ \frac{1}{2}m \left( \frac{p}{m} \right)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2q^2 \right] \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2q^2 . \end{aligned} \quad (\text{I.2.26})$$

Nachdem die Hamilton-Funktion bekannt ist, können sofort die Hamiltonschen Gleichungen (I.2.14) des Oszillators angegeben werden:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -m\omega^2q . \end{aligned} \quad (\text{I.2.27})$$

Daraus erhält man, wie erwartet, die äquivalente Schwingungsgleichung zweiter Ordnung (I.2.23) zurück:

$$\ddot{q} = \frac{\dot{p}}{m} = -\omega^2q . \quad (\text{I.2.28})$$



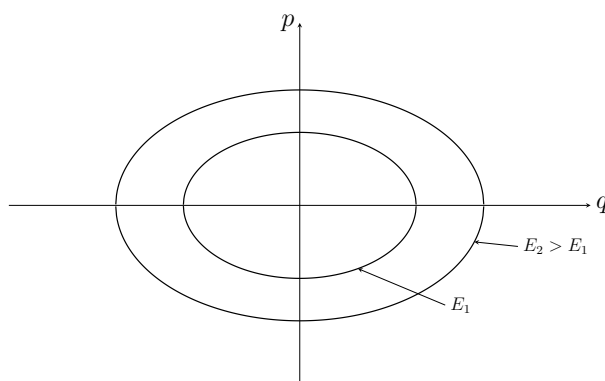


Abbildung I.10: *Phasenraumportrait eines harmonischen Oszillators*. Die Trajektorien eines harmonischen Oszillators mit gegebener Energie  $E$  verlaufen auf einer Ellipse, die durch die Energie  $E$  eindeutig bestimmt wird. Die Projektion von Trajektorien verschiedener Energie, die sich im Phasenraum nicht schneiden, überlagern sich auf der  $q$ -Achse.

Da die Hamiltonfunktion (I.2.26) nicht explizit zeitabhängig ist und weiterhin das Oszillatorpotential nicht von der Geschwindigkeit des oszillierenden Teilchens abhängt, liefert die Hamiltonfunktion für jede Trajektorie  $(p(t), q(t))$  ihre Energie  $E$ :

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 = E \quad (\text{I.2.29})$$

oder

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} = 1; \quad (\text{I.2.30})$$

das ist die kartesische Gleichung einer Ellipse mit der  $q$ -Halbachse

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \quad (\text{I.2.31})$$

und der  $p$ -Halbachse

$$b = \sqrt{2mE}. \quad (\text{I.2.32})$$

Bei gegebener Energie  $E$  ist damit diejenige Ellipse, auf der die Trajektorie des harmonischen Oszillators im Phasenraum verläuft, eindeutig festgelegt: Zu Trajektorien mit verschiedenen Energien gehören verschiedene Ellipsen, die sich weder schneiden noch berühren. Projiziert man dagegen Trajektorien mit verschiedenen Energien in den  $q$ -Raum (hier: auf die  $q$ -Achse), wie in der Abbildung I.10 angedeutet, liegen diese Projektionen übereinander! ■

Es sei nun  $(p(t), q(t))$  eine Phasenraumtrajektorie eines mechanischen Systems, dessen Zeitentwicklung durch eine Hamilton-Funktion  $H(p, q, t)$  generiert wird. Weiterhin sei

$A(p, q, t)$  eine Observable des Systems, also eine beliebige beobachtbare Größe, die durch eine auf dem Phasenraum definierte glatte Funktion dargestellt wird. Im Laufe der Zeit nimmt diese Größe für die betrachtete Trajektorie die Werte  $A(p(t), q(t), t)$  an; es gilt also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}A(p(t), q(t), t) &= \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial A}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial A}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial A}{\partial t} \\ &= \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial A}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial A}{\partial t}. \end{aligned} \quad (\text{I.2.33})$$

Definiert man nun die *Poisson-Klammer* zweier auf dem Phasenraum gegebener Funktionen  $F$  und  $G$  durch das Symbol<sup>9</sup>

$$\{F, G\} = \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q_k} - \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_k} \right), \quad (\text{I.2.34})$$

so erhält die Zeitentwicklungsgleichung (I.2.33) die kompakte Form

$$\frac{d}{dt}A = \{H, A\} + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (\text{I.2.35})$$

Daraus ergibt sich unmittelbar eine sehr wichtige Aussage:

*Sofern eine Größe  $A(p, q)$  nicht explizit zeitabhängig ist, so dass  $\partial A/\partial t = 0$ , ist sie genau dann „erhalten“, wenn ihre Poisson-Klammer mit der Hamilton-Funktion verschwindet.*

Die Poisson-Klammer, durch die zwei Phasenraumfunktionen  $F$  und  $G$  eine neue Phasenraumfunktion  $\{F, G\}$  zugeordnet wird, ist daher keineswegs lediglich eine abstrakte Rechenvorschrift, sondern sie besitzt eine sogar sehr anschauliche Bedeutung, die an späterer Stelle sichtbar werden wird. Zunächst sollen hier nur ihre algebraischen Eigenschaften zusammengestellt werden.<sup>10</sup>

(i) Die Poisson-Klammer (I.2.34) ist *schiefsymmetrisch*, d.h.

$$\{F, G\} = -\{G, F\}. \quad (\text{I.2.36})$$

(ii) Sie ist *bilinear*, d.h.

$$\begin{aligned} \{F, aG\} &= a\{F, G\} \quad \text{für reelles } a, \\ \{F, G + H\} &= \{F, G\} + \{F, H\}. \end{aligned} \quad (\text{I.2.37})$$

<sup>9</sup>Vorsicht: Die Definition dieser Poisson-Klammer wird in der Literatur nicht einheitlich gehandhabt. Viele Autoren benutzen das andere Vorzeichen!

<sup>10</sup>Beachte: Das auf dem  $\mathbb{R}^3$  definierte Kreuzprodukt  $\vec{a} \times \vec{b}$  zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  besitzt ebenfalls die Eigenschaften (i), (ii) und (iii). Diese drei Eigenschaften definieren eine *Lie-Klammer*; das Kreuzprodukt und die Poisson-Klammer sind daher verschiedene Beispiele einer solchen Klammer. Ein Vektorraum zusammen mit einer Lie-Klammer wird *Lie-Algebra* genannt.

(iii) Es gilt die *Jacobi-Identität*

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0. \quad (\text{I.2.38})$$

(iv) Es gilt eine „Produktregel“ in der Form

$$\{F, GH\} = G\{F, H\} + \{F, G\}H. \quad (\text{I.2.39})$$

Die Jacobi-Identität (I.2.38) besitzt eine interessante Konsequenz: Sind  $F$ ,  $G$  sowie die Hamilton-Funktion  $H$  eines Systems nicht explizit zeitabhängig und sind  $F$  und  $G$  Erhaltungsgrößen, so dass  $\{H, F\} = \{H, G\} = 0$ , so ist auch  $\{F, G\}$  eine Erhaltungsgröße, da ja  $\{H, \{F, G\}\} = 0$ . Es ist allerdings *nicht* garantiert, dass diese neue Erhaltungsgröße *unabhängig* von den alten ist, so dass man auf diese Weise nicht beliebig viele unabhängige Erhaltungsgrößen konstruieren kann.

### I.2.2 Hamiltonsche Systeme als „dynamische Systeme“

Unter einem *dynamischen System* versteht man ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t), \quad (\text{I.2.40})$$

wobei  $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$  eine vektorwertige Funktion einer unabhängigen Variablen  $t$  ist, die als Evolutionsparameter bezeichnet und in vielen konkreten Anwendungen durch die Zeit gegeben wird. Die (hinreichend glatte) Funktion  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist dementsprechend auf (einer Untermenge von)  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  definiert. Sofern  $f$  nicht von  $t$  abhängt, heißt das System *autonom*.

*Hamiltonsche Systeme* sind spezielle dynamische Systeme. Sie „leben“ in einem Phasenraum  $\Gamma$  gerader Dimension  $n = 2f$ , wobei  $f$  als die Zahl der Freiheitsgrade des Systems bezeichnet wird. In geeigneten („kanonischen“) Koordinaten<sup>11</sup>

$$\begin{aligned} p &= (p_1, \dots, p_f) && \text{— den „Impulskoordinaten“} \\ q &= (q_1, \dots, q_f) && \text{— den „Ortskoordinaten“} \end{aligned}$$

wird ein solches Hamiltonsches System von einer Hamiltonschen Funktion  $H = H(p, q, t)$  oder  $H = H(p, q)$  vermittelt:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p}. \end{aligned} \quad (\text{I.2.41})$$

---

<sup>11</sup>Beachte, dass die Antwort auf die Frage, welche der kanonischen Variablen als „Ort“ und welche als „Impuls“ angesehen werden, *nur* durch die Vorzeichen in den kanonischen Gleichungen (I.2.41) bestimmt wird!

Dabei wird ausdrücklich *nicht* vorausgesetzt, dass  $H$  vom Typ „Energie eines mechanischen Systems“ ist; *jede* auf einem Raum  $\Gamma$  gerader Dimension definierte und differenzierbare Funktion ist hier zulässig!

Es ist nun sehr hilfreich und konzeptionell weittragend, Hamiltonsche Systeme differentialgeometrisch zu betrachten: Aus geometrischer Sicht beschreiben Hamiltonsche Systeme einen *Fluss* im Phasenraum  $\Gamma$ . Denn an jeden Punkt  $\xi = (p, q)$  ist ein  $2f$ -dimensionaler „Geschwindigkeitsvektor“

$$\dot{\xi} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \quad (\text{I.2.42})$$

angeheftet, der angibt, wie schnell das System durch diesen Punkt des Phasenraums „fließt“. Dieses *Hamiltonsche Vektorfeld* (I.2.42) erzeugt den *Hamiltonschen Fluss*  $\Phi^t$ :

$$\Phi^t(\xi(0)) = \xi(t) \quad (\text{I.2.43})$$

oder

$$\Phi^t : \xi(0) \mapsto \xi(t) . \quad (\text{I.2.44})$$

Das besagt: Die Lösungskurven der Hamiltonschen Gleichungen (I.2.41), also die Phasenraumtrajektorien, die sich aus einem Anfangswert  $\xi(0)$  ergeben, liegen überall tangential zu den  $\dot{\xi}$  und werden mit derjenigen Geschwindigkeit durchlaufen, welche die Vektorlänge  $|\dot{\xi}|$  vorschreibt. Durch  $\Phi^t$  wird nun *jeder* Phasenraumpunkt  $\xi(0)$ , indem man ihn als Anfangswert der Hamiltonschen Gleichungen auffasst, auf denjenigen Punkt  $\xi(t)$  abgebildet, der sich daraus als Lösung dieser Gleichungen nach der Zeit  $t$  ergibt. Betrachtet man diese Konstruktion zunächst nur für *einen* Zeitpunkt  $t$ , erhält man eine Abbildung von  $\Gamma$  auf sich selbst. Die Gesamtheit („Schar“) dieser Abbildungen für *alle*  $t$  bildet den Hamiltonschen Fluss. Damit kann das Ziel der Untersuchung eines gegebenen Hamiltonschen Systems präzisiert werden:

*Ein Hamiltonsches System zu „lösen“ bedeutet, sich einen quantitativen Überblick über den gesamten von der Hamilton-Funktion erzeugten Fluss zu verschaffen (und nicht etwa nur eine einzige Bahn  $\xi(t)$  zu einem einzelnen Anfangswert  $\xi(0)$  zu berechnen)!*

In manchen Fällen ist dieser Überblick sehr einfach zu erhalten. Betrachtet man noch einmal den harmonischen Oszillator mit der aus Gleichung (I.2.26) bekannten Hamilton-Funktion

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 , \quad (\text{I.2.45})$$

so verlaufen die Trajektorien  $\xi(t) = (p(t), q(t))$  auf den schon bekannten Ellipsen (I.2.30), die durch ihre Energie  $E$  bestimmt werden:

$$1 = \frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} . \quad (\text{I.2.46})$$

Diese Ellipsen sind *invariant unter dem Hamiltonschen Fluss*, werden also durch  $\Phi^t$  auf sich selbst abgebildet: In diesem Beispiel ist der gesamte Phasenraum „stratifiziert“ in invariante Mannigfaltigkeiten, die die Topologie von  $S^1$  besitzen, also eines Kreises. Dieses Beispiel ist typisch für das Verhalten eines integrablen Hamiltonschen Systems.

Allein aufgrund der sehr speziellen Form der Hamiltonschen Gleichungen (I.2.41) besitzen Hamiltonsche Flüsse eine Reihe von besonderen Eigenschaften. Eine davon, die etwa für die klassische Statistische Physik wichtig ist, wird durch den *Satz von Liouville* ausgedrückt:

*Der Hamiltonsche Fluss ist volumenerhaltend.*

Das „Strömungsverhalten“ der Phasenraumtrajektorien eines mechanischen Systems entspricht also dem einer *inkompressiblen Flüssigkeit*!

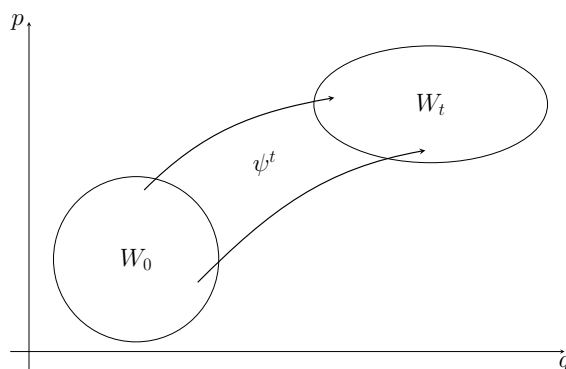


Abbildung I.11: *Zum Satz von Liouville.* Das Gebiet  $W_0$  im Phasenraum  $\Gamma$  wird unter dem Hamiltonschen Fluss  $\Phi^t$  auf das Gebiet  $W_t$  abgebildet. Dabei ist das Volumen des Bildes  $W_t$  identisch mit dem des Urbildes  $W_0$ , während sich seine Form im Allgemeinen ändert.

Zum Beweis dieser Aussage betrachte man zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  ein beliebiges Gebiet  $W_0$  in  $\Gamma$ , das wie in Abbildung I.11 unter dem Fluss  $\Phi^t$  auf das Gebiet  $W_t$  abgebildet wird. Die Phasenraumvolumina dieser beiden Gebiete sind

$$V_0 = \int_{W_0} d^{2f} \xi(0) \quad (\text{I.2.47})$$

und

$$V_t = \int_{W_t} d^{2f} \xi(t) . \quad (\text{I.2.48})$$

Nach der „Transformationsformel“ der Analysis für einen Variablenwechsel bei mehrdimensionaler Integration hat man nun

$$V_t = \int_{W_0} d^{2f} \xi(0) \left| \det \left( \frac{\partial \Phi_i^t(\xi(0))}{\partial \xi_j(0)} \right) \right| , \quad (\text{I.2.49})$$

so dass die Integration zur Bestimmung des Volumens von  $W_t$  auf  $W_0$  „zurückgeholt“ wird. Von ganz entscheidender Bedeutung ist hierbei die *Jacobi-Determinante* des Hamiltonschen Flusses,

$$D(t) = \left| \det \left( \frac{\partial \Phi_i^t(\xi(0))}{\partial \xi_j(0)} \right) \right| ; \quad (\text{I.2.50})$$

diese beschreibt die Veränderung des „strömenden Volumens“ im Laufe der Zeit. Nun ist

$$\frac{d}{dt} V_t \Big|_{t=0} = \int_{W_0} d^{2f} \xi(0) \frac{dD(t)}{dt} \Big|_{t=0}, \quad (\text{I.2.51})$$

und eine Taylor-Entwicklung des Flusses um  $t = 0$  liefert komponentenweise

$$\begin{aligned} \xi_i(t) &= \Phi_i^t(\xi(0)) \\ &= \xi_i(0) + t \frac{d}{dt} \Phi_i^t(\xi(0)) \Big|_{t=0} + \mathcal{O}(t^2). \end{aligned} \quad (\text{I.2.52})$$

Weil die Ableitung des Flusses durch das Hamiltonsche Vektorfeld gegeben wird — das ist ja gerade die definierende Eigenschaft des Flusses! — bedeutet das, wenn man diese Beziehung (I.2.52) in den  $(p, q)$ -Koordinaten ausschreibt,

$$\begin{pmatrix} p(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(0) \\ q(0) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \Big|_{t=0} + \mathcal{O}(t^2). \quad (\text{I.2.53})$$

Bezeichnet man jetzt das Hamiltonsche Vektorfeld bei  $t = 0$  als  $F(\xi(0))$  und schreibt damit die Entwicklung (I.2.52) in der Form

$$\xi_i(t) = \xi_i(0) + t F_i(\xi(0)) + \mathcal{O}(t^2), \quad (\text{I.2.54})$$

so hat man sofort die Funktionalmatrix des Flusses,

$$\frac{\partial \Phi_i^t(\xi(0))}{\partial \xi_j(0)} = \delta_{ij} + t \frac{\partial F_i(\xi(0))}{\partial \xi_j(0)} + \mathcal{O}(t^2). \quad (\text{I.2.55})$$

Im nächsten Schritt ist die Determinante  $D(t)$  dieser Funktionalmatrix, also die Jacobi-Determinante (I.2.50) zu berechnen. Nun gilt für jede nichtsinguläre Matrix  $M$  die wichtige Beziehung

$$\ln \det M = \text{Spur} \ln M. \quad (\text{I.2.56})$$

(Beweis: *Übungsaufgabe!*) Dabei wird natürlich die Matrix  $\ln M$  über die Logarithmusreihe der Matrix  $M$  definiert. Benutzt man daher die Entwicklung  $\ln(1+x) = x + \mathcal{O}(x^2)$ , hat man sofort

$$\begin{aligned} D(t) &= \det \left( \frac{\partial \Phi_i^t(\xi(0))}{\partial \xi_j(0)} \right) \\ &= 1 + t \sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F_i(\xi(0))}{\partial \xi_i(0)} + \mathcal{O}(t^2), \end{aligned} \quad (\text{I.2.57})$$

woraus sich die benötigte Ableitung ohne Näherung ergibt:

$$\left. \frac{dD(t)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F_i(\xi(0))}{\partial \xi_i(0)}. \quad (\text{I.2.58})$$

Da aber nun  $F$  die Komponenten des Hamiltonschen Vektorfeldes zusammenfasst,

$$F = \left( -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_f}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_f} \right)^t, \quad (\text{I.2.59})$$

während  $\xi$  die Phasenraumpunkte bezeichnet,

$$\xi = (p_1, \dots, p_f, q_1, \dots, q_f)^t, \quad (\text{I.2.60})$$

kann die Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung (I.2.58) sehr einfach ausgeführt werden:

$$\sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F_i}{\partial \xi_i} = \sum_{k=1}^f \left( -\frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_k} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_k} \right) = 0, \quad (\text{I.2.61})$$

so dass man mit Gleichung (I.2.51) schließlich auf

$$\left. \frac{d}{dt} V_t \right|_{t=0} = 0 \quad (\text{I.2.62})$$

geführt wird. Das ist das gesuchte Resultat: Das „strömende Gebiet“  $W_t$  kann unter dem Hamiltonschen Fluss zwar seine Form ändern, nicht jedoch sein Volumen.

Das Kernstück dieser Beweiskette ist auch ohne großen formalen Aufwand leicht zu verstehen: Betrachtet man die z.B. aus der Hydrodynamik bekannte *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0, \quad (\text{I.2.63})$$

so sieht man, dass eine Änderung der Dichte  $\varrho(\vec{r}, t)$  einer strömenden Flüssigkeit durch die Divergenz des Stromdichte-Feldes  $\vec{j}(\vec{r}, t)$  gegeben wird. Für eine *inkompressible* Flüssigkeit hat man daher

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0. \quad (\text{I.2.64})$$

Entsprechend lautet die „Phasenraumdivergenz“ des Hamiltonschen Vektorfeldes nun<sup>12</sup>

$$\left( \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial p} \\ \frac{\partial}{\partial q} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c} -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{array} \right) = -\frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} = 0; \quad (\text{I.2.65})$$

das entspricht genau dem entscheidenden Beweisschritt (I.2.61). Man kann daher den Satz von Liouville auch wie folgt formulieren:

<sup>12</sup>Die Summation über alle Freiheitsgrade wird von dieser Notation impliziert.

*Der Hamiltonsche Fluss ist quellenfrei.*

Diese Sichtweise macht besonders deutlich, dass der Satz von Liouville lediglich auf die *Form* der Hamiltonschen Gleichungen (I.2.41) zurückzuführen ist, nicht jedoch darauf, wie die Hamilton-Funktion eines gegebenen Systems konkret aussieht.

Der „Flussgedanke“, d.h. die geometrische Sichtweise auf Hamiltonsche Systeme, wird im übernächsten Abschnitt noch einmal aufgenommen und weiterentwickelt werden. Vorher soll jedoch das vielleicht wichtigste Prinzip der Theoretischen Mechanik formuliert werden.

### I.2.3 Das Prinzip der kleinsten Wirkung

Bisher wurde stets davon ausgegangen, dass die von einem mechanischen System durchlaufenen Bahnen als Lösung einer Differentialgleichung gefunden werden. Es gibt jedoch eine besondere Eigenschaft, die diese „richtigen“ Bahnen vor allen anderen Pfaden auszeichnet, die gegebene Anfangs- und Endpunkte verbinden. Um diese Eigenschaft formulieren zu können, ist es notwendig, solche Pfade zu „bewerten“, d.h. ihnen in bestimmter Weise eine Zahl zuzuordnen. Eine solche Zuordnung führt auf den Begriff des *Funktional*s als einer „Funktion von Funktionen“. Betrachte dazu zunächst *ohne* Bezug zur Mechanik als „Definitionsbereich“ eines Funktionals die Menge aller glatten Kurven

$$\gamma : t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad t_1 \leq t \leq t_2 , \quad (\text{I.2.66})$$

wobei Anfangs- und Endpunkt eventuell vorgegeben werden:  $x(t_1) = x_{(1)}$ ,  $x(t_2) = x_{(2)}$ . Unter einem Funktional  $F : \gamma \mapsto F[\gamma]$  versteht man nun eine Vorschrift, die einer solchen Funktion eine Zahl zuordnet. Die folgenden Beispiele zeigen, dass eine derartige Abbildung sehr verschiedene Eigenschaften ihres Argumentes berücksichtigen kann:

- (i) Man kann einer Bahnkurve einfach das Quadrat ihrer Entfernung vom Koordinatenursprung zu einem Zeitpunkt  $t_0$  zuordnen:

$$F[\gamma] = ax^2(t_0) \quad \text{für } t_1 \leq t_0 \leq t_2 ; \quad (\text{I.2.67})$$

dabei ist  $a$  ein beliebiger „Maßstabsfaktor“.

- (ii) In ähnlicher Weise kann man einer Bahnkurve das Quadrat einer momentanen Geschwindigkeit zuordnen:

$$F[\gamma] = b\dot{x}^2(t_0) \quad \text{für } t_1 \leq t_0 \leq t_2 ; \quad (\text{I.2.68})$$

auch  $b$  spielt hier nur die Rolle eines Skalenfaktors.

- (iii) Ist  $f : t \mapsto f(t) \in \mathbb{R}^n$  eine beliebige, aber feste Funktion, so liefert das Skalarprodukt

$$F[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt f(t) \cdot x(t) \quad (\text{I.2.69})$$

ein lineares Funktional.



(iv) Das geschwindigkeitsabhängige Funktional

$$F[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\dot{x}^2(t)} \quad (\text{I.2.70})$$

besitzt eine offensichtliche geometrische Interpretation: Es liefert die Bogenlänge der Kurve  $\gamma$ .

(v) Es sei  $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Funktion, also nicht unbedingt die Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems. Dann ist

$$A[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x(t), \dot{x}(t), t) \quad (\text{I.2.71})$$

ein Funktional, das sowohl die gegebene Kurve als auch ihre Geschwindigkeit bewertet.

Die Funktionale (I.2.67) und (I.2.68) sind *lokal*, d.h. sie hängen nur von den Eigenschaften der Bahn an einem einzigen Punkt ab; die Funktionale (I.2.69), (I.2.70) und (I.2.71) dagegen nichtlokal.

In ähnlicher Weise wie für Funktionen kann man auch für Funktionale die Eigenschaften der Stetigkeit und der Differenzierbarkeit definieren:

*Ein Funktional  $F : \gamma \mapsto F[\gamma]$  heißt stetig in einem „Punkt“  $\gamma_0$ , wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert mit der Eigenschaft, dass*

$$|F[\gamma_0 + h] - F[\gamma_0]| < \varepsilon \quad \text{für } \|h\| < \delta .$$

Obwohl diese Definition sehr an die bekannte Definition der Stetigkeit von Funktionen erinnert, gibt es einen wesentlichen neuen Punkt: Da auf Funktionenräumen — im Unterschied zu endlichdimensionalen Vektorräumen — *nicht* alle Normen äquivalent sind, muss die hier benutzte Norm  $\|\cdot\|$  genau spezifiziert werden. Es kann nämlich vorkommen, dass ein Funktional zwar bezüglich einer ersten Norm stetig ist, bezüglich einer zweiten jedoch nicht. (*Übungsaufgabe!*) Hier einige typische Beispiele für oft verwendete Normen auf Funktionenräumen:

(i) Ist eine Funktion  $h$  für  $t_1 \leq t \leq t_2$  stetig, so nimmt  $|h(t)|$  auf diesem Intervall sein Maximum an. Eine mögliche Norm wird dann gegeben durch

$$\|h\|_1 = \max_{t_1 \leq t \leq t_2} |h(t)| . \quad (\text{I.2.72})$$

(ii) Ist die Funktion  $h$  für  $t_1 \leq t \leq t_2$  sogar stetig differenzierbar, so erhält man eine „strengere“ Norm durch

$$\|h\|_2 = \max_{t_1 \leq t \leq t_2} |h(t)| + \max_{t_1 \leq t \leq t_2} |\dot{h}(t)| . \quad (\text{I.2.73})$$

- (iii) Eine einfache Möglichkeit, auch für unstetige integrable Funktionen eine Norm zu definieren, liefert

$$\|h\|_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt |h(t)| . \quad (\text{I.2.74})$$

Die Frage, welche Norm die jeweils richtige ist, wird in vielen Fällen durch die Problemstellung selbst beantwortet.

Ein Funktional, das in jedem Punkt seines Definitionsbereiches stetig ist, wird kurz als stetig bezeichnet. Die Differenzierbarkeit eines derart stetigen Funktionals wird über die Möglichkeit einer linearen Entwicklung definiert:

*Ein stetiges Funktional  $F : \gamma \mapsto F[\gamma]$  heißt differenzierbar bei  $\gamma_0$ , wenn ein lineares Funktional  $F'[\gamma_0]$  existiert mit der Eigenschaft, dass<sup>13</sup>*

$$F[\gamma_0 + h] - F[\gamma_0] = F'[\gamma_0]h + \mathcal{O}(\|h\|^2) ;$$

*dafür schreibt man mit  $h = \delta x$  in der Physik häufig*

$$\delta F[\gamma_0] = F'[\gamma_0]\delta x + \mathcal{O}(\|\delta x\|^2) .$$

Die geforderte Linearität dieser „Funktionalableitung“ bedeutet natürlich, dass

$$F'[\gamma_0](c_1 h_1 + c_2 h_2) = c_1 F'[\gamma_0]h_1 + c_2 F'[\gamma_0]h_2 . \quad (\text{I.2.75})$$

Es soll nun die Ableitung des Funktionals (I.2.71) ermittelt werden. Variiert man dazu das Argument  $\gamma$ , d.h. betrachtet man anstelle der Bahnkurve  $t \mapsto x(t)$  eine „leicht deformierte“ Kurve  $t \mapsto x(t) + h(t)$  für eine „kleine“ Funktion  $h$ , so hat man

$$\begin{aligned} A[\gamma + h] &= \int_{t_1}^{t_2} dt L(x(t) + h(t), \dot{x}(t) + \dot{h}(t), t) \\ &= A[\gamma] + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} h_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{h}_i \right) + \mathcal{O}(\|h\|^2) \\ &= A[\gamma] + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} h_i \right) \right] + \mathcal{O}(\|h\|^2) \\ &= A[\gamma] + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \mathcal{O}(\|h\|^2) . \end{aligned} \quad (\text{I.2.76})$$

<sup>13</sup>Man beachte die nicht ganz konsequente Schreibweise:  $F'[\gamma_0]$  bezeichnet keinen Zahlenwert, sondern die Funktionalableitung bei  $\gamma_0$ , die ihrerseits ein lineares Funktional bildet und auf  $h$  angewandt wird, um eine Zahl zu erhalten:  $F'[\gamma_0]h \equiv (F'[\gamma_0])[h]$ .

Diese Umformung ist in einem formalen Sinne für jede Norm richtig. Wenn man aber wie üblich verlangt, dass die vernachlässigten Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\|h\|^2)$  klein werden, wenn auch  $\|h\|$  klein ist, kann man nicht die Maximumnorm (I.2.72) verwenden: Auch wenn das Maximum einer Funktion beliebig klein bleibt, kann ihre Ableitung beliebig groß werden. Um also nicht nur Terme höherer Ordnung in  $h$ , sondern auch die in der Entwicklung ebenfalls auftauchenden Terme höherer Ordnung in  $\dot{h}$  in diesem Sinne kontrollieren zu können, benötigt man etwa die Norm (I.2.73). Damit lässt sich das Ergebnis der Umformung (I.2.76) wie folgt zusammenfassen:

*Das Funktional*

$$A[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x(t), \dot{x}(t), t),$$

das für eine differenzierbare Funktion  $L(x, y, t)$  auf der Menge aller „Pfade“  $\gamma : t \rightarrow x(t)$  mit  $t_1 \leq t \leq t_2$  definiert ist, ist bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_2$  stetig und differenzierbar, wobei die Funktionalableitung in dem „Punkt“  $\gamma_0$  gegeben wird durch das lineare Funktional

$$A'[\gamma_0]h = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} h_i \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Aus naheliegenden Gründen werden Umformungen der Art (I.2.76) häufig als *Variationsrechnung* bezeichnet. Für den Fall, dass Anfangs- und Endpunkte der Pfade „nicht mitvariiert werden“, dass also der Definitionsbereich des Funktionals  $A$  eingeschränkt wird auf Pfade mit festen Anfangs- und Endpunkten,  $x(t_1) = x_{(1)}$  und  $x(t_2) = x_{(2)}$ , ergibt sich die Forderung  $h(t_1) = h(t_2) = 0$ . Dann verschwinden die bei der partiellen Integration auftretenden Randterme, und man hat die Funktionalableitung

$$A'[\gamma_0]h = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) h_i; \quad (\text{I.2.77})$$

das ist ein lineares Funktional genau des Typs (I.2.69).

Ebenso wie reellwertige Funktionen können auch reellwertige Funktionale Maxima und Minima, also stationäre Punkte besitzen. Die Bedingung für die Stationarität eines Funktionals  $F$  bei  $\gamma_0$  lautet natürlich  $F'[\gamma_0] = 0$ , woraus sich für das Funktional (I.2.71) sofort die folgende wichtige Aussage ergibt:

*Das Funktional  $A[\gamma]$  wird genau dann stationär für einen Pfad  $\gamma_0 : t \mapsto x_0(t)$ , wenn entlang des Pfades die Bedingungen*

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x_0(t), \dot{x}_0(t), t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(x_0(t), \dot{x}_0(t), t)$$

*und an seinen Endpunkten die Bedingungen*

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(x_0(t_1), \dot{x}_0(t_1), t_1) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}(x_0(t_2), \dot{x}_0(t_2), t_2) = 0$$

*für  $i = 1, \dots, n$  erfüllt werden.*

Wenn nun erneut Anfangs- und Endpunkte der Bahnen bei der Variation festgehalten werden, reduziert sich die Stationaritätsbedingung für das Funktional  $A$  auf die Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \quad ; \quad i = 1, \dots, n ; \quad (\text{I.2.78})$$

diese Gleichungen werden als die *Euler-Lagrange-Gleichungen* des Funktionals (I.2.71) bezeichnet.

Bis zu diesem Punkt hatten die Überlegungen dieses Abschnitts noch keinen direkten Bezug zur Mechanik. Mit den bisher entwickelten Techniken lassen sich sehr allgemeine Variationsaufgaben lösen, in denen optimale Funktionen gesucht werden. Ein typisches Beispiel dafür bildet die Suche nach einer minimalen Rotationsfläche: Welche auf dem Intervall  $x_1 \leq x \leq x_2$  definierte und stetige Funktion  $y = y(x)$  mit gegebenen Randwerten  $y(x_1)$  und  $y(x_2)$  besitzt die Eigenschaft, dass sich die kleinstmögliche Fläche ergibt, wenn ihr Graph um die  $x$ -Achse rotiert? (*Übungsaufgabe!*) — Jetzt aber sei  $L(q, \dot{q}, t)$  die in generalisierten Koordinaten ausgedrückte Lagrange-Funktion eines mechanischen Systems mit  $f$  Freiheitsgraden. Das dem Funktional (I.2.71) nachgebildete Funktional

$$S[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t), t) \quad (\text{I.2.79})$$

trägt dann die Dimension „Energie  $\times$  Zeit = Wirkung“ und wird daher als *Wirkungsfunktional* bezeichnet. Die Argumente dieses Funktionals sind nun *beliebige* Kurven

$$\gamma : t \mapsto q(t) \quad (\text{I.2.80})$$

im Konfigurationsraum, also keineswegs nur diejenigen Bahnen  $q(t)$ , die vom System als Lösung seiner Bewegungsgleichungen tatsächlich durchlaufen werden: Das Wirkungsfunktional (I.2.79) „bewertet“ auch solche Pfade, die vom System *nicht* realisiert werden können; genau diese „Erweiterung des Gesichtskreises“ begründet der große Bedeutung der Wirkung  $S[\gamma]$ . Die tatsächlichen Bahnen des Systems ergeben sich nun als Lösung seiner Bewegungsgleichungen, also der bekannten Lagrange-Gleichungen zweiter Art:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad ; \quad k = 1, \dots, f . \quad (\text{I.2.81})$$

Aus der in das Auge springenden Tatsache, dass diese Bewegungsgleichungen genau die Euler-Lagrange-Gleichungen (I.2.78) des Funktionals (I.2.79) bilden, also für Bahnen mit festen Anfangs- und Endpunkten  $q(t_1)$  und  $q(t_2)$  genau den Stationaritätsbedingungen des Wirkungsfunktionals entsprechen, kann man sofort einen überaus bemerkenswerten Schluss ziehen:

*Von allen Pfaden  $q(t)$ , die einen festen Anfangspunkt  $q(t_1)$  im Konfigurationsraum mit einem ebenfalls festen Endpunkt  $q(t_2)$  verbinden, werden von einem mechanischen System diejenigen tatsächlich durchlaufen, für die sein Wirkungsfunktional stationär wird.*

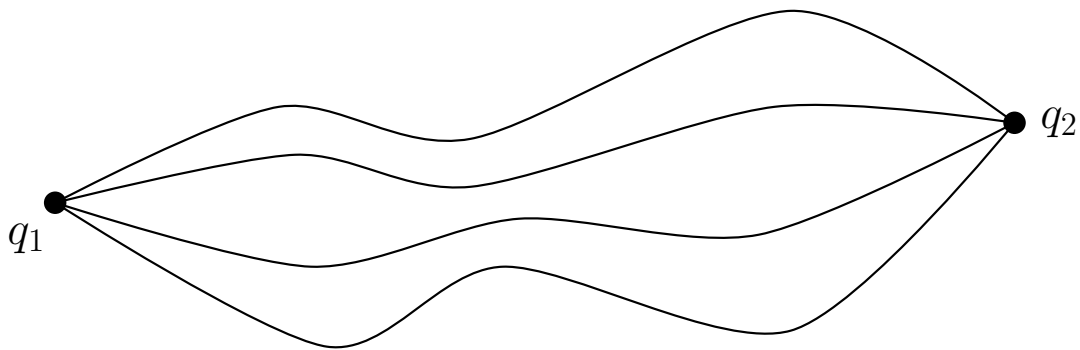


Abbildung I.12: Zum Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung. Das Wirkungsfunktional (I.2.79) bewertet *alle* Pfade, die im Konfigurationsraum von  $q(t_1) = q_1$  nach  $q(t_2) = q_2$  laufen; tatsächlich realisiert werden diejenigen Pfade, für die es stationär wird.

Man kann also durch eine in Abbildung I.12 schematisch dargestellte Variation einer Bahnkurve erkennen, ob sie „mechanisch möglich“ ist, *ohne* sie in die Bewegungsgleichungen einsetzen zu müssen!

Es ist bekannt, dass „die“ Lagrange-Funktion  $L(q, \dot{q}, t)$  eines mechanischen Systems nicht eindeutig durch die Forderung bestimmt wird, dass sich daraus die als bekannt vorausgesetzten „richtigen“ Bewegungsgleichungen ergeben mögen: Ist nämlich  $g(q, t)$  eine beliebige differenzierbare Funktion, so liefert die modifizierte Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned}\tilde{L}(q, \dot{q}, t) &= L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}g(q, t) \\ &= L(q, \dot{q}, t) + \sum_{k=1}^f \frac{\partial g}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial g}{\partial t}\end{aligned}\quad (\text{I.2.82})$$

dieselben Bewegungsgleichungen wie  $L(q, \dot{q}, t)$ . (*Übungsaufgabe!*) Aus der Sicht des Wirkungsfunktionals ist das unmittelbar einleuchtend: Man hat

$$\begin{aligned}\tilde{S}[\gamma] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \tilde{L}(q, \dot{q}, t) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}g(q, t) \right] \\ &= S[\gamma] + g(q_2, t_2) - g(q_1, t_1).\end{aligned}\quad (\text{I.2.83})$$

Da nun Anfangs- und Endpunkte der Bahnen bei der Variation festgehalten werden sollen, unterscheiden sich  $\tilde{S}[\gamma]$  und  $S[\gamma]$  nur um eine Konstante und besitzen daher die gleichen stationären Punkte.

Es stellt sich noch die Frage, ob ein durch das Wirkungsfunktional ausgezeichneter stationärer Punkt ein Maximum oder ein Minimum (oder gar einen Wendepunkt) der Wirkung

darstellt. Betrachte dazu eine eindimensionale Bewegung mit der Lagrange-Funktion

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - U(q) \quad (\text{I.2.84})$$

und variiere den darin eingesetzten Pfad:

$$\begin{aligned} L(q+h, \dot{q}+\dot{h}) &= \frac{1}{2}m(\dot{q}+\dot{h})^2 - U(q+h) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + m\dot{q}\dot{h} + \frac{1}{2}m\dot{h}^2 - U(q) - U'(q)h - \frac{1}{2}U''(q)h^2 + \mathcal{O}(\|h\|^3) \\ &= L(q, \dot{q}) + \frac{d}{dt}(m\dot{q}h) + (-m\ddot{q} - U'(q))h \\ &\quad + \frac{1}{2}m\dot{h}^2 - \frac{1}{2}U''(q)h^2 + \mathcal{O}(\|h\|^3) . \end{aligned} \quad (\text{I.2.85})$$

Längs der vom System tatsächlich durchlaufenen Bahn  $\gamma_0$  gilt

$$m\ddot{q} = -U'(q) , \quad (\text{I.2.86})$$

so dass

$$S[\gamma_0 + h] = S[\gamma_0] + \int_{t_1}^{t_2} dt \left( \frac{1}{2}m\dot{h}^2 - \frac{1}{2}U''(q)h^2 \right) + \mathcal{O}(\|h\|^3) . \quad (\text{I.2.87})$$

Wenn nun die Dauer  $t_2 - t_1$  hinreichend klein wird, wird das Vorzeichen des Integrals durch das der kinetischen Energie bestimmt, da ja  $h(t_1) = h(t_2) = 0$  und  $h$  stetig ist. Dann ist das Vorzeichen der zweiten Variationsableitung *positiv*; für kleine Zeitintervalle ist der stationäre Punkt also stets ein *Minimum* des Wirkungsfunktional. Man spricht daher oft vom „Hamiltonschen Prinzip der kleinsten Wirkung“.

### I.2.4 Kommutierende Flüsse und integrable Systeme

In Abschnitt I.1.4 wurde bereits festgehalten, dass sich integrable mechanische Systeme dadurch auszeichnen, dass sie für jeden Freiheitsgrad eine (unabhängige) Erhaltungsgröße besitzen. Der Begriff der Integrabilität lässt sich jedoch noch sehr viel schärfer fassen. Das genaue Verständnis dessen, was „Integrabilität“ eigentlich bedeutet, bildet die Voraussetzung für die spätere Behandlung der sehr viel schwierigeren, aber typischen „nichtintegrablen“ Systeme.

Zur Vorbereitung wird nun die „Wechselwirkung“ zweier verschiedener Hamiltonscher Flüsse  $\Phi_F$  und  $\Phi_G$  untersucht, also von zwei Flüssen, die von zwei verschiedenen Hamiltonschen Funktionen  $F(p, q)$  und  $G(p, q)$  im Phasenraum  $\Gamma$  erzeugt werden. Im einfachsten Fall „vertauschen“ diese beiden Flüsse, so dass

$$\Phi_G^{t_2} \circ \Phi_F^{t_1} = \Phi_F^{t_1} \circ \Phi_G^{t_2} . \quad (\text{I.2.88})$$

Das besagt, dass die beiden Abbildungssequenzen

$$\xi(0) \xrightarrow{\Phi_F^{t_1}} \xi(t_1) \xrightarrow{\Phi_G^{t_2}} \xi(t_1 + t_2) \quad (\text{I.2.89})$$

und

$$\xi(0) \xrightarrow{\Phi_G^{t_2}} \tilde{\xi}(t_2) \xrightarrow{\Phi_F^{t_1}} \tilde{\xi}(t_1 + t_2) \quad (\text{I.2.90})$$

für alle Anfangspunkte  $\xi(0)$  und alle Zeiten  $t_1, t_2$  zum gleichen Resultat führen. Das ist jedoch, wie in der Abbildung I.13 skizziert, im Allgemeinen *nicht* der Fall.

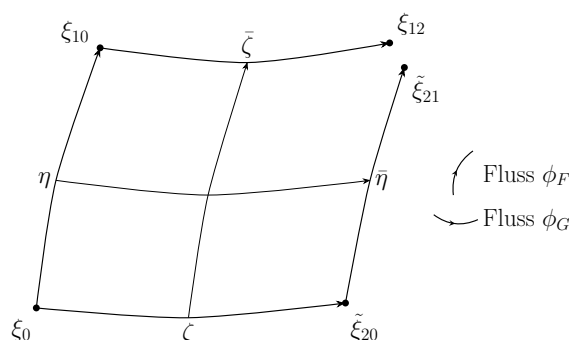


Abbildung I.13: *Nicht-kommutierende Hamiltonsche Flüsse*. Ein Anfangswert  $\xi_0$  wird in zwei verschiedenen Hamiltonschen Flüssen  $\Phi_F$  und  $\Phi_G$  transportiert. Abhängig davon, ob der betrachtete Punkt erst in  $\Phi_F$  „mitschwimmt“ und dann in  $\Phi_G$ , oder ob der Transport durch die Flüsse in umgekehrter Reihenfolge erfolgt, werden bei gleichen Flusszeiten im Allgemeinen zwei verschiedene Endpunkte erreicht.

Um den „Grad der Nichtvertauschbarkeit“ der beiden Flüsse quantifizieren zu können, wird nun die Differenz der beiden Endpunkte berechnet, wobei die Bezeichnungen aus Abbildung I.13 verwendet werden: Folgt man erst dem Fluss  $\Phi_F$  für die Dauer  $t_1$  und dann dem Fluss  $\Phi_G$  für die Dauer  $t_2$ , so erhält man

$$\xi_{12} = \xi_0 + t_1 \begin{pmatrix} -\partial_q \\ \partial_p \end{pmatrix} F(\eta) + t_2 \begin{pmatrix} -\partial_q \\ \partial_p \end{pmatrix} G(\bar{\zeta}) \quad (\text{I.2.91})$$

nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung mit geeigneten Stützstellen  $\eta$  und  $\bar{\zeta}$ , wobei eine selbsterklärende bequeme Kurzschreibweise verwendet wurde. Folgt man andererseits erst dem Fluss  $\Phi_G$  für die Dauer  $t_2$  und dann dem Fluss  $\Phi_F$  für die Dauer  $t_1$ , so ergibt sich auf die gleiche Weise

$$\tilde{\xi}_{21} = \xi_0 + t_1 \begin{pmatrix} -\partial_q \\ \partial_p \end{pmatrix} F(\bar{\eta}) + t_2 \begin{pmatrix} -\partial_q \\ \partial_p \end{pmatrix} G(\zeta) \quad (\text{I.2.92})$$

mit weiteren Stützstellen  $\bar{\eta}$  und  $\zeta$ . Damit erhält man für die Differenz der Endpunkte den Ausdruck

$$\xi_{12} - \tilde{\xi}_{21} = t_1 \begin{pmatrix} -\partial_q \\ \partial_p \end{pmatrix} (F(\eta) - F(\bar{\eta})) + t_2 \begin{pmatrix} -\partial_q \\ \partial_p \end{pmatrix} (G(\bar{\zeta}) - G(\zeta)) . \quad (\text{I.2.93})$$

Für kleine Flusszeiten  $t_1$  und  $t_2$ , die beide von gleicher Größenordnung  $\mathcal{O}(t)$  sein sollen, hat man weiterhin

$$\bar{\eta} - \eta = t_2 \begin{pmatrix} -\partial_q \\ \partial_p \end{pmatrix} G(\xi_0) + \mathcal{O}(t^2) \quad (\text{I.2.94})$$

sowie

$$\bar{\zeta} - \zeta = t_1 \begin{pmatrix} -\partial_q \\ \partial_p \end{pmatrix} F(\xi_0) + \mathcal{O}(t^2), \quad (\text{I.2.95})$$

wobei hier und im Folgenden die flusserzeugenden Funktionen  $F$  und  $G$  am Startpunkt  $\xi_0$  ausgewertet werden. Die übliche Taylor-Entwicklung der Funktion  $F$  führt dann mit der Differenz (I.2.94) des Argumentes auf

$$\begin{aligned} F(\bar{\eta}) - F(\eta) &= (\bar{\eta} - \eta) \begin{pmatrix} \partial_p \\ \partial_q \end{pmatrix} F(\xi_0) + \mathcal{O}((\bar{\eta} - \eta)^2) \\ &= t_2 \begin{pmatrix} -\partial_q G \\ \partial_p G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_p F \\ \partial_q F \end{pmatrix} + \mathcal{O}(t^2), \end{aligned} \quad (\text{I.2.96})$$

die Entwicklung von  $G$  mit der Differenz (I.2.95) auf

$$G(\bar{\zeta}) - G(\zeta) = t_1 \begin{pmatrix} -\partial_q F \\ \partial_p F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_p G \\ \partial_q G \end{pmatrix} + \mathcal{O}(t^2). \quad (\text{I.2.97})$$

Einsetzen dieser beiden Ausdrücke (I.2.96) und (I.2.97) in die gesuchte Differenz (I.2.93) liefert dann unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung  $\mathcal{O}(t^3)$  die Beziehung

$$\begin{aligned} \xi_{12} - \tilde{\xi}_{21} &= t_1 t_2 \begin{pmatrix} -\partial_q \\ \partial_p \end{pmatrix} \left[ - \begin{pmatrix} -\partial_q G \\ \partial_p G \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_p F \\ \partial_q F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\partial_q F \\ \partial_p F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_p G \\ \partial_q G \end{pmatrix} \right] \\ &= 2t_1 t_2 \begin{pmatrix} -\partial_q \\ \partial_p \end{pmatrix} [\partial_p F \partial_q G - \partial_q F \partial_p G] \\ &= 2t_2 t_2 \begin{pmatrix} -\partial_q \\ \partial_p \end{pmatrix} \{F, G\}. \end{aligned} \quad (\text{I.2.98})$$

Hier tritt wieder die bereits in Abschnitt I.2.1 eingeführte Poisson-Klammer der Phasenraumfunktionen  $F(p, q)$  und  $G(p, q)$  auf:

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \partial_p F \partial_q G - \partial_q F \partial_p G \\ &= \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q_k} - \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_k} \right). \end{aligned} \quad (\text{I.2.99})$$

Das Resultat (I.2.98) besagt somit, dass für infinitesimale Flusszeiten, für die die Vernachlässigung der höheren Terme der Entwicklungen gerechtfertigt ist, der Grad der Nichtvertauschbarkeit der beiden Flüsse  $\Phi_F$  und  $\Phi_G$  von der Poisson-Klammer  $\{F, G\}$  bestimmt wird. Diese Aussage gilt in Strenge sogar für beliebig große Flusszeiten:



Zwei Hamiltonsche Flüsse  $\Phi_F$  und  $\Phi_G$  kommutieren genau dann, wenn die Poisson-Klammer  $\{F, G\}$  der beiden flusserzeugenden Funktionen  $F$  und  $G$  verschwindet.

Nachdem die Poisson-Klammer in Abschnitt I.2.1 *algebraisch* charakterisiert worden war als eine Lie-Klammer, d.h. als eine bilineare, schiefsymmetrische Abbildung, die die Jacobi-Identität erfüllt, lässt sich nun auch ihre *Funktion* verstehen: Es gilt

$$\begin{aligned}
 \{F, G\} &= \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q_k} - \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_k} \right) \\
 &= \partial_p F \partial_q G - \partial_q F \partial_p G \\
 &= \begin{pmatrix} -\partial_q F \\ \partial_p F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_p G \\ \partial_q G \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix}_F \cdot \begin{pmatrix} \partial_p G \\ \partial_q G \end{pmatrix}; \tag{I.2.100}
 \end{aligned}$$

damit ist  $\{F, G\}$  das *Skalarprodukt* zwischen den von  $F$  erzeugten Flussvektoren und den Phasenraum-Gradienten von  $G$ . Nun beschreibt dieser Gradient eine „Richtungsableitung“, und das Skalarprodukt bewirkt deren Projektion auf den Flussvektor:

*Die Poisson-Klammer  $\{F, G\}$  ist die Ableitung von  $G$  in Richtung des von  $F$  erzeugten Flusses; wegen  $\{F, G\} = -\{G, F\}$  gilt das (bis auf ein Vorzeichen) auch umgekehrt.*

Diese Einsicht erlaubt es nun, einige schon bekannte Beziehungen neu zu interpretieren: Gemäß der Gleichung (I.2.33) hat man

$$\frac{d}{dt}A = \{H, A\} + \frac{\partial}{\partial t}A$$

für eine Observable  $A(p, q, t)$ , die längs einer Trajektorie  $(p(t), q(t))$  ausgewertet wird, also in diesem Sinne „im Hamiltonschen Fluss mitschwimmt“; ist  $A$  nicht explizit zeitabhängig, bleibt

$$\frac{d}{dt}A = \{H, A\}.$$

Daher ist  $A$  „erhalten“, wenn  $\{H, A\} = 0$ , wenn sich also  $A$  in Richtung des von  $H$  erzeugten Flusses nicht ändert: Das ist sogar anschaulich klar!

Auch die generalisierten Koordinaten selbst können als Phasenraumfunktionen aufgefasst werden: Man setze  $F(p, q) = q_i$  und  $G(p, q) = q_j$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
 \{q_i, q_j\} &= \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} - \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial p_k} \right) \\
 &= 0. \tag{I.2.101}
 \end{aligned}$$

Daher kommutieren die von  $q_i$  und  $q_j$  erzeugten Flüsse, was nichts anderes bedeutet, als dass die Flusslinien als *Koordinatenlinien* eines (evtl. krummlinigen) Koordinatensystems dienen können, wie in der Abbildung I.14 verdeutlicht wird: Wenn man entlang der von  $q_1$  erzeugten Flusslinie fortschreitet, ändert sich der Wert von  $q_2$  nicht, usw.

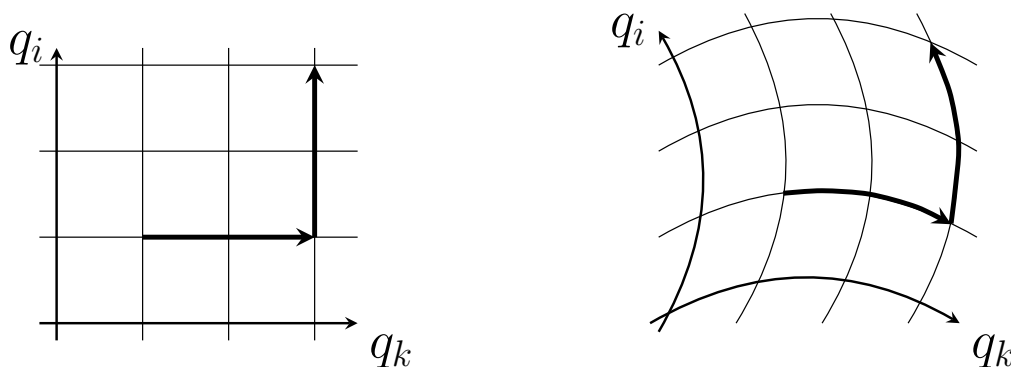


Abbildung I.14: *Koordinatensysteme als „Systeme von Flusslinien“*. Ein System von Koordinaten  $q_1, q_2, \dots$  zeichnet sich dadurch aus, dass sich eine Koordinate  $q_i$  nicht ändert, wenn man sich entlang einer durch  $q_j$  beschriebenen anderen Koordinatenlinie bewegt: Dann sind alle Maschen des Gitters in sich geschlossen. Das ist genau die Eigenschaft, die durch die fundamentale Poisson-Klammer (I.2.101) zum Ausdruck gebracht wird.

Ganz allgemein bilden daher die Gleichungen  $\{Q_i, Q_j\} = 0$  die Bedingung dafür, dass ein System von Funktionen  $Q_k = Q_k(p, q)$  mit  $k = 1, \dots, f$  als kanonisches Koordinatensystem eines mechanischen Systems mit  $f$  Freiheitsgraden dienen kann.

Setzt man dagegen  $F(p, q) = p_i$  und  $G(p, q) = q_j$ , so findet man

$$\begin{aligned}
 \{p_i, q_j\} &= \sum_{k=1}^f \left( \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} - \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial p_k} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^f \delta_{ik} \delta_{jk} \\
 &= \delta_{ij} .
 \end{aligned}
 \tag{I.2.102}$$

Diese Beziehung kann als Definition angesehen werden dafür, was „kanonisch konjugiert sein“ eigentlich bedeutet:

*f* Phasenraumfunktionen  $Q_k = Q_k(p, q)$ , deren Poisson-Klammern paarweise verschwinden, so dass  $\{Q_i, Q_j\} = 0$  für  $i, j = 1, \dots, f$ , und weitere *f* Phasenraumfunktionen  $P_k = P_k(p, q)$ , deren Poisson-Klammern ebenfalls paarweise verschwinden, so dass auch  $\{P_i, P_j\} = 0$  für  $i, j = 1, \dots, f$ , heißen kanonisch konjugiert zueinander, wenn sich die Größen  $Q_i$  für  $i \neq j$  in dem von  $P_j$  erzeugten Fluss nicht ändern, in dem von  $P_i$  erzeugten Fluss dagegen mit

konstanter Rate 1:

$$\{P_i, Q_j\} = \delta_{ij} .$$

Die Poisson-Klammern

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 \quad , \quad \{P_i, P_j\} = 0 \quad , \quad \{P_i, Q_j\} = \delta_{ij} , \quad (\text{I.2.103})$$

die für *jeden* Satz kanonisch konjugierter Phasenraumvariablen gelten müssen, werden oft als *fundamentale Poisson-Klammern* bezeichnet. Diese Beziehungen haben wichtige Konsequenzen: So besagt z.B. die bekannte „Vertauschungsrelation“ (*Übungsaufgabe!*)

$$\{\ell_i, \ell_j\} = -\varepsilon_{ijk} \ell_k \quad (\text{I.2.104})$$

für die Komponenten  $\ell_i$  des Bahndrehimpulsvektors, dass zwei verschiedene Drehimpuls-komponenten *nicht* gleichzeitig als kanonische Impulsvariablen dienen können. Das Konzept der kommutierenden Hamiltonschen Flüsse ist nun von entscheidender Bedeutung für die exakte Charakterisierung integrierbarer Hamiltonscher Systeme:

*Ein Hamiltonsches System mit  $f$  Freiheitsgraden ist genau dann integrabel, wenn es  $f$  unabhängige, vertauschbare Erhaltungsgrößen  $F_1, \dots, F_f$  besitzt.*

Dabei bedeutet *Unabhängigkeit* der Erhaltungsgrößen, dass die  $f$  Hamiltonschen Vektorfelder, die von ihnen erzeugt werden, fast überall linear unabhängig sind; *Vertauschbarkeit* verlangt, dass ihre Poisson-Klammern verschwinden:

$$\{F_i, F_j\} = 0 . \quad (\text{I.2.105})$$

Man spricht dann von „ $f$  Konstanten der Bewegung, die in Involution zueinander stehen“. Für ein mechanisches System, das durch eine nicht explizit zeitabhängige Hamilton-Funktion  $H(p, q)$  gegeben wird, ist natürlich  $H$  selbst eine mögliche Funktion  $F_k$ .

Aus der Existenz dieser  $f$  unabhängigen Erhaltungsgrößen folgt zunächst, dass jede Trajektorie  $\xi(t) = \Phi_H^t(\xi(0))$  in einer lediglich  $f$ -dimensionalen Untermenge des  $2f$ -dimensionalen Phasenraums verläuft; diese Untermenge wird durch Gleichungen der Form

$$F_k(\xi(t)) = c_k \quad ; \quad k = 1, \dots, f \quad (\text{I.2.106})$$

charakterisiert. Aus der Forderung, dass die Erhaltungsgrößen „vertauschbar“ sein sollen, folgt weiterhin, dass diese  $f$ -dimensionale Untermenge — unabhängig von der genauen physikalischen Natur des jeweiligen Systems! — eine *universelle Topologie* besitzt:

*Sofern die Bewegung beschränkt bleibt, also keine der Bahnen bezüglich einer oder mehrerer Variablen ins Unendliche läuft, ist die durch die Werte der  $f$  Erhaltungsgrößen spezifizierte invariante Untermannigfaltigkeit des Phasenraums für alle typischen integrierbaren Systeme ein  $f$ -Torus.*

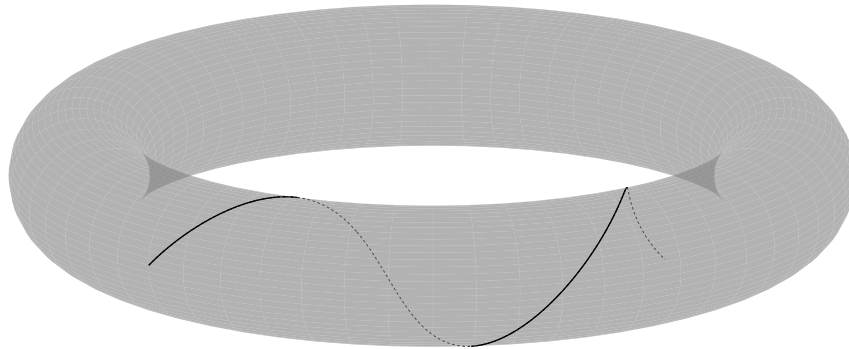


Abbildung I.15: *Das Liouville-Arnol'd-Theorem*. Die invarianten Mannigfaltigkeiten im Phasenraum eines beschränkten integrablen Systems besitzen immer die Topologie eines  $f$ -Torus. Jede Bahn des Systems verläuft auf einem solchen Torus, der durch die Werte der  $f$  Erhaltungsgrößen festgelegt wird.

Eine Lösungskurve bleibt daher an „ihren“ Torus gebunden und „umspinnt“ ihn. Diese Aussage, die in der Abbildung I.15 verdeutlicht wird, wird als *Liouville-Arnol'd-Theorem* bezeichnet.

Dieses Theorem kann hier nicht streng bewiesen werden, aber es lässt sich „anschaulich“ verstehen: Einerseits werden die Normalenvektoren  $N_k(\xi)$  im Punkt  $\xi$  auf den Konstanzflächen  $F_k(\xi) = c_k$  gerade durch die Gradienten der Erhaltungsgrößen gegeben:

$$N_k(\xi) = \begin{pmatrix} \partial_p \\ \partial_q \end{pmatrix} F_k(\xi) . \quad (\text{I.2.107})$$

Andererseits erzeugt jede Erhaltungsgröße einen Hamiltonschen Fluss mit den Tangentialvektoren

$$T_k(\xi) = \begin{pmatrix} -\partial_q \\ \partial_p \end{pmatrix} F_k(\xi) . \quad (\text{I.2.108})$$

Weil die Poisson-Klammer  $\{F_i, F_j\}$  nichts anderes ist als das Skalarprodukt  $T_i \cdot N_j$ , besagen die „Involutionsgleichungen“  $\{F_i, F_j\} = 0$  gerade, dass

$$T_i(\xi) \perp N_j(\xi) \quad ; \quad i, j = 1, \dots, f . \quad (\text{I.2.109})$$

Damit müssen die  $f$  Vektorfelder  $T_k$  stets senkrecht auf den Normalenvektoren  $N_k$  der invarianten Mannigfaltigkeit stehen und somit tangential zu dieser Mannigfaltigkeit sein. Die einzige  $f$ -Mannigfaltigkeit, die sich durch  $f$  linear unabhängige Tangentialvektorfelder singularitätenfrei „kämmer“ lässt, ist jedoch ein  $f$ -Torus.

### I.2.5 Weiterführung der Theorie: Ordnung und Chaos

Beim weiteren Ausbau der Theoretischen Mechanik, der in der Vorlesung „Teilchen und Felder II“ vorgenommen wird, werden zwei Fragen zu beantworten sein:

- (i) Falls ein System integrabel ist: Wie kann dieser Sachverhalt ausgenutzt werden, um das System zu „lösen“, d.h. die Zeitentwicklung beliebiger Trajektorien zu berechnen?
- (ii) Falls ein System *nicht* integrabel ist: Was ändert sich dann?

Der Fragenkomplex (i) ist Gegenstand der *Hamilton-Jacobi-Theorie*: Ziel dieser Theorie ist die Angabe einer *kanonischen Transformation* von den „alten“ Koordinaten  $(p, q)$  auf „neue“ kanonisch konjugierte Impuls- und Ortsvariablen  $(I, \vartheta)$ , in denen die Hamilton-Funktion *nur* von den Impulsen  $I = (I_1, \dots, I_f)$  abhängt, so dass sogar *jede* der Ortsvariablen  $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_f)$  zyklisch ist:

$$H = H(I_1, \dots, I_f) . \quad (\text{I.2.110})$$

Denn dann hat man einerseits die Hamiltonschen Gleichungen

$$\dot{I}_k = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta_k} = 0 \quad ; \quad k = 1, \dots, f , \quad (\text{I.2.111})$$

so dass die neuen Impulsvariablen selbst mit den Erhaltungsgrößen des Systems übereinstimmen. Andererseits ergibt sich

$$\dot{\vartheta}_k = \frac{\partial H}{\partial I_k} =: \omega_k(I_1, \dots, I_f) \quad ; \quad k = 1, \dots, f ; \quad (\text{I.2.112})$$

da die Impulsvariablen  $I_1, \dots, I_f$  konstant bleiben, gilt das auch für die hier eingeführten Frequenzen  $\omega_k(I)$ . Damit wird nun die Integration der Bewegungsgleichungen trivial:

$$\begin{aligned} I_k(t) &= I_k(0) \\ \vartheta_k(t) &= \vartheta_k(0) + \omega_k(I)t . \end{aligned} \quad (\text{I.2.113})$$

Diese „guten“ Impulsvariablen sind die so genannten *Wirkungsvariablen*. Sie lassen sich, wie in der Abbildung I.16 für  $f = 2$  veranschaulicht, berechnen durch Integration der alten Impulse längs der  $f$  topologisch verschiedenen geschlossenen „Basiswege“ auf den invarianten  $f$ -Tori des Systems:

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_k} p \, dq \quad ; \quad k = 1, \dots, f . \quad (\text{I.2.114})$$

Leider ist der Nutzen dieser theoretisch sehr wichtigen Beziehung für die rechentechnische Praxis eher gering: Um die Wirkungsvariablen damit berechnen zu können, muss man die invarianten Tori im Phasenraum bereits kennen. Wenn man aber diese Information besitzt, ist das System gelöst!

Die zu den Wirkungsvariablen  $I$  kanonisch konjugierten (dimensionslosen) Ortsvariablen  $\vartheta$  heißen *Winkelvariablen*; sie bilden die Koordinatenlinien auf den durch  $I_1, \dots, I_f$  indizierten Tori.

Um die gesuchte Transformation  $(p, q) \longleftrightarrow (I, \vartheta)$  tatsächlich konstruieren zu können, benötigt man eine so genannte *erzeugende Funktion*, die sich ihrerseits als Lösung der hier nicht diskutierten *Hamilton-Jacobi-Gleichung* ergibt:

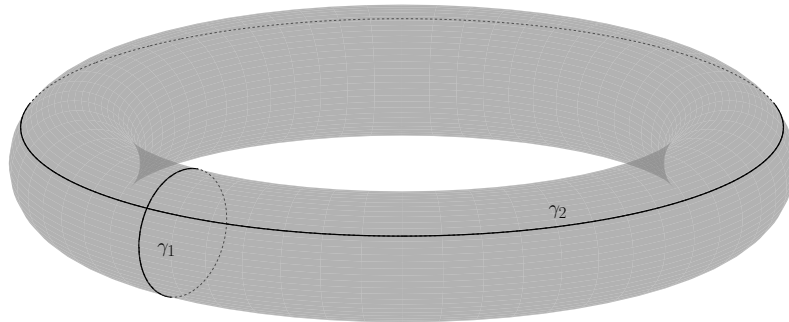


Abbildung I.16: Zur Definition der Wirkungsvariablen. Ein  $f$ -Torus besitzt die Topologie von  $S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$  mit  $f$  Faktoren, also gibt es  $f$  nicht ineinander deformierbare Basiszyklen  $\gamma_k$  mit der Topologie eines Kreises. Diese Wege  $\gamma_k$  bilden die „Integrationspfade“ für die Berechnung der Wirkungsvariablen (I.2.114).

*Die Hamilton-Jacobi-Gleichung ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung für die erzeugende Funktion einer kanonischen Transformation von den alten Variablen  $(p, q)$  auf Wirkungs- und Winkelvariablen  $(I, \vartheta)$ , in denen der Fluss die triviale Gestalt (I.2.113) besitzt.*

Die Lösung eines integrablen Hamiltonschen Systems geschieht dann nach folgendem Schema:



Abbildung I.17: Lösung integrabler Systeme. Nach einer kanonischen Transformation der Anfangswerte auf Wirkungs- und Winkelvariablen wird die Zeitentwicklung des Systems in einfacher Weise durch Gleichung (I.2.113) beschrieben; Umkehrung der Transformation liefert dann den gesuchten Endpunkt der Phasenraumtrajektorie.

Die „eigentliche“ Zeitentwicklung ist nun trivial; die Schwierigkeit besteht in der Durchführung der kanonischen Transformation. Da dieses Schema jedoch im Prinzip mit beliebiger Genauigkeit umgesetzt werden kann, ist auch das Langzeitverhalten eines integrablen Hamiltonschen Systems zumindest im Prinzip mit beliebiger Genauigkeit berechenbar.

Um weiterhin auch *nichtintegrable* Systeme zu verstehen, die *weniger* Erhaltungsgrößen besitzen als Freiheitsgrade, geht man aus von einem integrablen System  $H_0(I)$  und fügt eine „kleine“ Störung  $\varepsilon H_1(I, \vartheta)$  hinzu, durch die z.B. eine Symmetrie von  $H_0$  „gebrochen“ wird. Man betrachtet also eine Hamilton-Funktion der Form

$$H(I, \vartheta) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \vartheta), \quad (\text{I.2.115})$$

wobei die Wirkungs- und Winkelvariablen  $(I, \vartheta)$  diejenigen des ungestörten Systems sind. Die mathematisch sehr aufwändige und tiefgehende Untersuchung des Einflusses der Störung auf das Verhalten des Systems führt auf das *Kolmogorov-Arnol'd-Moser-Theorem*, das mit den Anfangsbuchstaben seiner geistigen Väter kurz als „KAM-Theorem“ bezeichnet wird und eine der wichtigsten Aussagen der modernen Theoretischen Mechanik bildet:

*Invariante Tori eines ungestörten Systems  $H_0(I)$  mit „hinreichend irrationalen“ Verhältnissen der Umlauffrequenzen  $\omega_k(I)$  werden unter dem Einfluss einer hinreichend kleinen Störung  $\varepsilon H_1(I, \vartheta)$  zwar deformiert, bleiben aber (bis zu einer gewissen Störstärke  $\varepsilon_{\max}(I)$ , über die nichts ausgesagt wird) als invariante Mannigfaltigkeiten in  $\Gamma$  erhalten.*

Dabei wird der „Grad der Irrationalität“ einer Zahl durch ihre Kettenbruchzerlegung festgelegt.<sup>14</sup> Damit stellt dieses Theorem eine Verbindung her zwischen der Lösung von Differentialgleichungen und der Struktur des Zahlenkontinuums! Tori mit *rationalen* (bzw. nicht „hinreichend irrationalen“) Frequenzverhältnissen werden dagegen im Allgemeinen aufgrund von *Resonanzen* zerstört und rufen *chaotische* Bewegung hervor, die *nicht* an invariante Mannigfaltigkeiten gebunden ist. Somit findet man in typischen (d.h. nichtintegrablen) Hamiltonschen Systemen ein Nebeneinander von *Ordnung und Chaos*. Die chaotischen Regionen zwischen den noch erhaltenen KAM-Tori liegen im Phasenraum *dicht*, da sie aus allen ehemals „rationalen“ Tori zu  $H_0$  entstehen. In ihnen kann eine Trajektorie des Systems für  $f > 2$  in die Nähe jedes Punktes von  $\Gamma$  „diffundieren“; das ist die so genannte *Arnol'd-Diffusion*. Dabei laufen Trajektorien mit beliebig nahe benachbarten Anfangswerten sehr schnell sehr weit auseinander, so dass auch Computer aufgrund ihrer nur endlichen Darstellungsgenauigkeit sehr schnell an Grenzen stoßen:

*Das Langzeitverhalten einzelner Trajektorien eines nichtintegrablen Hamiltonschen Systems ist prinzipiell weder analytisch noch numerisch berechenbar.*

Noch ein kleiner Ausblick auf die Quantenmechanik: In der „alten“ Quantentheorie, d.h. in der Phase nach der Entdeckung „gequantelter“ atomarer Energien, aber vor der Entdeckung der Schrödinger-Gleichung wurde vermutet, dass die diskreten Energiewerte, die ein quantenmechanisches System annehmen kann, gemäß einer Vorschrift

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_k} p dq = n_k \hbar \quad (\text{I.2.116})$$

<sup>14</sup> „Typische“ irrationale Zahlen wie etwa  $e$  oder  $\pi$  sind in diesem Sinne nicht sehr irrational — die „irrationalste“ Zahl im Intervall  $[0, 1]$  ist der *goldene Schnitt*  $g = (\sqrt{5} - 1)/2$ .

durch „Quantisierung“ der klassischen Wirkungsvariablen (I.2.114) erhalten werden, indem man nämlich diese Wirkungsvariablen mit einem ganzzahligen Vielfachen  $n_k \hbar$  des Planckschen „Wirkungsquantums“  $\hbar$  identifiziert.<sup>15</sup> Heute ist bekannt, dass man auf diese Weise in der Tat gute „semiklassische Näherungen“ für die exakten quantenmechanischen Energieeigenwerte erhalten kann. Das wirft jedoch eine wichtige neue Frage auf: Wie ausgeprägt ist die klassisch-quantenmechanische Korrespondenz für Quantensysteme, deren klassisches Gegenstück nicht integrabel ist, so dass die für die Berechnung der Wirkungsvariablen erforderlichen invarianten Tori nicht existieren? Nicht zuletzt für die Beantwortung dieser Frage<sup>16</sup> lohnt sich die weitere Beschäftigung mit nichtintegrablen Hamiltonschen Systemen!

---

<sup>15</sup>Im Bohrschen Atommodell werden die „stabilen Kreisbahnen“ eines Elektrons im Wasserstoffatom durch die Bedingung charakterisiert, dass ihr Bahndrehimpuls ein ganzzahliges Vielfaches des Wirkungsquantums ist. Das ist ein Spezialfall der allgemeineren „Bohr-Sommerfeld-Quantisierungsregel“ (I.2.116).

<sup>16</sup>Diese Frage wurde von Albert Einstein bereits im Jahre 1917 aufgeworfen und ist immer noch Gegenstand aktueller Forschungen!



## II Elektrodynamik

Die Elektrodynamik bildet den zweiten Grundpfeiler der Ausbildung in Theoretischer Physik. Sie ist eine *klassische Feldtheorie*, die eine enorme Menge an Erfahrungstatsachen korrekt beschreibt und kaum zu überschätzende praktische Bedeutung besitzt, für die Konstruktion optischer Geräte ebenso wie für die Signalübertragung. Aus der hier eingenommenen theoretischen Perspektive ist bemerkenswert, dass aus der Mechanik bekannte Grundprinzipien — der Lagrange-Formalismus, die Gewinnung von Bewegungsgleichungen aus der Stationarität eines Wirkungsfunktional — auch in der Elektrodynamik wieder eine zentrale Rolle spielen.

### II.1 Die Maxwell-Gleichungen und ihre Erhaltungsgrößen

Für diesen zweiten Teil der Vorlesung werden die Maxwell-Gleichungen als bekannt vorausgesetzt; für ihre empirische Begründung wird auf die Experimentalphysik verwiesen. Ziel dieser Einführung ist weniger die „Lösung“ der Gleichungen für bestimmte Situationen als vielmehr das Verständnis ihrer Struktur.

#### II.1.1 Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum

Wie üblich bezeichne  $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$  das elektrische Feld am Ort  $\vec{r}$  zum Zeitpunkt  $t$ , das durch die Kraft auf eine *ruhende* Ladung ausgemessen werden kann, und  $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}, t)$  das magnetische Feld (genauer: die „magnetische Induktion“), das durch die Kraft auf eine *bewegte* Ladung nachgewiesen wird. Weiter seien  $\rho = \rho(\vec{r}, t)$  die Dichte der elektrischen Ladung und  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r}, t)$  die elektrische Stromdichte. Dann stellen die Maxwell-Gleichungen im Vakuum die folgenden Zusammenhänge zwischen diesen Größen her:

- (i) Die Quellen des elektrischen Feldes sind die Ladungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho ; \quad (\text{II.1.1})$$

das ist das *Gauß'sche Gesetz*.

- (ii) Das magnetische Feld ist quellenfrei:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 ; \quad (\text{II.1.2})$$

dieser Befund besitzt keinen eigenen Namen.

- (iii) Ein sich änderndes magnetisches Feld erzeugt ein elektrisches Wirbelfeld:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ; \quad (\text{II.1.3})$$

das ist das *Faradaysche Induktionsgesetz*.

- (iv) Ein fließender Strom *oder* ein sich änderndes elektrisches Feld erzeugt ein magnetisches Wirbelfeld:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (\text{II.1.4})$$

das ist das um den *Maxwellschen Verschiebungsstrom* ergänzte Ampèresche Gesetz.

Hier wird das *SI-System* verwendet, in dem neben den mechanischen Basiseinheiten für Länge, Masse und Zeit auch eine elektrische Basiseinheit eingeführt wird; seit 1948 verwendet man als solche grundlegende elektrische Einheit das Ampere (A) für die Stromstärke.<sup>1</sup> Wegen dieser vier Basiseinheiten Meter, Kilogramm, Sekunde und Ampere, die dann zur Beschreibung elektrodynamischer Phänomene herangezogen werden, spricht man von dem *MKSA-System*; demgegenüber beruht das häufig noch benutzte *CGS-System* nur auf den mechanischen Basiseinheiten Zentimeter, Gramm und Sekunde. In diesem CGS-System wird dann auch die Einheit der Ladung durch die Einheiten der Kraft und der Länge festgelegt: Man geht dazu aus von dem Coulomb-Gesetz für die Kraft  $\vec{F}$ , die zwei *ruhende* Ladungen  $q_1$  und  $q_2$  aufeinander ausüben, wenn sie sich an den Orten  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  befinden,

$$\vec{F} = k q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}, \quad (\text{II.1.5})$$

und legt den noch offenen Proportionalitätsfaktor willkürlich fest durch die Forderung  $k = 1$ . Per Definition üben dann zwei elektrostatische Ladungseinheiten (LE) im Abstand von 1 cm die Kraft von 1 dyn = 1 g cm s<sup>-2</sup> aufeinander aus, so dass

$$(1 \text{ LE})^2 = 1 \text{ dyn} \times 1 \text{ cm}^2$$

oder

$$1 \text{ LE} = 1 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}.$$

Demgegenüber ist im MKSA-System die Einheit der Ladung das Coulomb (C),

$$1 \text{ C} = 1 \text{ As},$$

und die Proportionalitätskonstante  $k$  in dem Coulomb-Gesetz (II.1.5) ist hier

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \quad (\text{II.1.6})$$

mit der Dielektrizitätskonstanten des Vakuums  $\varepsilon_0$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{10^7}{4\pi \left(c \times \frac{\text{s}}{\text{m}}\right)^2} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \\ &\approx 8.8542 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Jm}}. \end{aligned} \quad (\text{II.1.7})$$

<sup>1</sup>Wortlaut der Definition des Ampere seit 1948: 1 A ist die Stärke des zeitlich konstanten elektrischen Stromes, der im Vakuum zwischen zwei parallelen, unendlich langen, geraden Leitern mit vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt und dem Abstand von 1 Meter zwischen diesen Leitern eine Kraft von  $2 \times 10^{-7}$  Newton pro Meter Leiterlänge hervorrufen würde.

Dabei ist  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum:<sup>2</sup>

$$c = 299\,792\,458 \text{ ms}^{-1}. \quad (\text{II.1.8})$$

Weiterhin gilt für die Permeabilität des Vakuums  $\mu_0$  die Beziehung

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}, \quad (\text{II.1.9})$$

also

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}. \quad (\text{II.1.10})$$

Die „künstlichen“ Werte von  $\varepsilon_0$  and  $\mu_0$  werden daher nur durch die Definition der Ladungseinheit im MKSA-System bedingt und sind *nicht* „fundamental“; die *einzig* fundamentale Naturkonstante, die (unabhängig vom benutzten Einheitensystem) in die Maxwell-Gleichungen eingeht, ist die Lichtgeschwindigkeit  $c$ .

In den Maxwell-Gleichungen treten Ladungen und Ströme als „Inhomogenitäten“ auf; die Gleichungen legen somit die von diesen Ladungen bzw. Strömen erzeugten elektromagnetischen Felder fest. Umgekehrt regelt das Lorentz-Kraftgesetz, wie gegebene Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  auf die Ladungen wirken: Für eine Punktladung  $q$ , die sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt, gilt

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (\text{II.1.11})$$

Die Maxwell-Gleichungen (II.1.1) und (II.1.4) haben zusammen eine sehr wichtige Konsequenz: Da Wirbelfelder quellenfrei sind, erhält man aus dem ergänzten Ampèreschen Gesetz (II.1.4) sofort

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= 0 \\ &= \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}; \end{aligned} \quad (\text{II.1.12})$$

zusammen mit dem Gauß'schen Gesetz (II.1.1) folgt daraus

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (\text{II.1.13})$$

Das ist die *Kontinuitätsgleichung*, durch die die *lokale* Erhaltung der Ladung ausgedrückt wird: Die Änderung der in einem Volumen  $V$  insgesamt enthaltenen Ladung ist nach dieser Gleichung gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V d^3r \varrho &= \int_V d^3r \frac{\partial \varrho}{\partial t} \\ &= - \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \\ &= - \int_{\partial V} d\vec{a} \cdot \vec{j}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.14})$$

---

<sup>2</sup>Dieser Wert ist exakt festgelegt, über ihn wird der Meter definiert!

wobei  $d\vec{a}$  die Oberflächenelemente auf dem Rand  $\partial V$  des Volumens  $V$  bezeichnet. Das besagt: Wenn sich die Ladung im Innern eines Volumens  $V$  ändert, dann *nur*, weil sie durch seinen Rand  $\partial V$  nach außen strömt. Eine solche lokale Ladungserhaltung ist offenbar weit stärker als eine nur globale, die auch unstetige Transportprozesse zulassen würde. Eine analoge Aussage gilt auch für andere erhaltene Größen:

*Eine Kontinuitätsgleichung der Gestalt (II.1.13) zeigt stets die Existenz einer lokalen Erhaltungsgröße an.*

### II.1.2 Poynting-Vektor und Energieerhaltung

Bekanntlich ist

$$W_{\text{el}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \int d^3r \vec{E}^2 \quad (\text{II.1.15})$$

die in einem elektrischen Feld gespeicherte Energie, d.h. die Arbeit, die gegen die Coulomb-Abstoßung aufgebracht werden musste, um die felderzeugenden Ladungen räumlich zusammenzubringen, und

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2\mu_0} \int d^3r \vec{B}^2 \quad (\text{II.1.16})$$

die in einem magnetischen Feld gespeicherte Energie, d.h. die Arbeit, die notwendig war, um die felderzeugenden Ströme in Gang zu setzen. Es ist nun nicht zu erwarten, dass es für die gesamte im Feld gespeicherte Energie  $W_{\text{el}} + W_{\text{mag}}$  einen Erhaltungssatz gibt, sofern sich in diesem Feld Ladungsträger bewegen, da dann das Feld Arbeit daran verrichtet. Wie aber sieht die Energiebilanz aus?

Wird eine Ladung  $q$  in einem elektromagnetischen Feld  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  um eine Strecke  $d\vec{r} = \vec{v}dt$  bewegt, so verrichtet das Feld nach dem Lorentz-Kraftgesetz (II.1.11) an dieser Ladung die mechanische Arbeit<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}dt \\ &= q\vec{E} \cdot \vec{v}dt. \end{aligned} \quad (\text{II.1.17})$$

Hier wird eine einfache, aber wichtige Tatsache deutlich:

*Magnetische Kräfte leisten keine Arbeit.*

Nun ist weiter  $q = \rho d^3r$  und  $\rho\vec{v} = \vec{j}$ . Die Rate, mit der Arbeit an den Ladungsträgern in einem felderfüllten Volumen  $V$  verrichtet wird, ist also

$$\frac{dW_{\text{mech}}}{dt} = \int_V d^3r \vec{E} \cdot \vec{j}. \quad (\text{II.1.18})$$

---

<sup>3</sup>Die vom Feld verrichtete Arbeit (II.1.17) wird hier als „mechanisch“ bezeichnet, weil sie zu einer Beschleunigung der die Ladung tragenden Masse führt.

Im nächsten Schritt wird die Maxwell-Gleichung (II.1.4) genutzt, um die Stromdichte, an der die Arbeit verrichtet wird, wieder durch die Felder auszudrücken, die diese Arbeit verrichten: Es gilt

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (\text{II.1.19})$$

also wird die „mechanische Leistungsdichte“  $\vec{E} \cdot \vec{j}$  bilinear in den Feldern:

$$\vec{E} \cdot \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (\text{II.1.20})$$

Mit Hilfe der Produktregel

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \quad (\text{II.1.21})$$

sowie des Induktionsgesetzes

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

lässt sich dann der erste Term auf der rechten Seite der Beziehung (II.1.20) so umformen, dass diese Gleichung eine sehr symmetrische Form annimmt: Durch Einsetzen von

$$\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (\text{II.1.22})$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{j} &= -\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) - \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}). \end{aligned} \quad (\text{II.1.23})$$

Unter Benutzung des Gauß'schen Integralsatzes ergibt sich daher für die pro Zeit an den Ladungsträgern in  $V$  verrichtete Arbeit der Ausdruck

$$\frac{dW_{\text{mech}}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V d^3r \left( \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right) - \frac{1}{\mu_0} \int_{\partial V} d\vec{a} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}). \quad (\text{II.1.24})$$

Das ist der *Poyntingsche Satz*, der als „Energiesatz der Elektrodynamik“ aufzufassen ist: Denn da die Summe

$$w_{\text{em}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \quad (\text{II.1.25})$$

gemäß den Gleichungen (II.1.15) und (II.1.16) die *Energiedichte* des elektromagnetischen Feldes darstellt, muss der Vektor

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \quad (\text{II.1.26})$$

in Analogie zur Kontinuitätsgleichung (II.1.13) die zugehörige *Energiestromdichte* angeben; dieser „Energiestromdichtevektor“ wird als *Poynting-Vektor* bezeichnet. Damit lässt sich der Poyntingsche Satz (II.1.24) in einfacher Weise in Worte fassen:

*Die Zunahme der mechanischen Energie der in einem Volumen  $V$  enthaltenen Ladungsträger ist gleich der Abnahme der im elektromagnetischen Feld in  $V$  gespeicherten Energie, abzüglich desjenigen Teiles dieser Feldenergie, der durch den Rand  $\partial V$  nach außen strömt.*

Drückt man nun auch die mechanische Energie der sich bewegenden Ladungsträger in  $V$  durch eine *mechanische Energiedichte*  $w_{\text{mech}}$  aus, schreibt also

$$\begin{aligned} \frac{dW_{\text{mech}}}{dt} &= \int_V d^3r \vec{E} \cdot \vec{j} \\ &= \frac{d}{dt} \int_V d^3r w_{\text{mech}} , \end{aligned} \quad (\text{II.1.27})$$

so erhält der Poyntingsche Satz die suggestive Form

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3r (w_{\text{mech}} + w_{\text{em}}) = - \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{S} . \quad (\text{II.1.28})$$

Für die gesamte Energiedichte  $w_{\text{mech}} + w_{\text{em}}$  gilt somit die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} (w_{\text{mech}} + w_{\text{em}}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0 , \quad (\text{II.1.29})$$

die in genauer Parallelität zu der Kontinuitätsgleichung (II.1.13) der Ladung aussagt, dass die Gesamtenergie „lokal erhalten“ ist. Allerdings muss dabei stets das Gesamtsystem aus Feldern *und* ladungstragenden Teilchen betrachtet werden; die im Feld gespeicherte Energie alleine ist keine Erhaltungsgröße.

### ■ **Beispiel:** Die Energiebilanz eines stromdurchflossenen Drahtes

Man betrachte einen Draht der Länge  $L$  mit kreisförmigem Querschnitt, an dessen Enden eine Spannung  $U$  anliegt; das in Drahrichtung weisende elektrische Feld hat also die Stärke

$$E = \frac{U}{L} . \quad (\text{II.1.30})$$

Aufgrund dieser Spannung fließt in dem Draht ein Strom der Stärke  $I$ . Dieser erzeugt nach dem Ampèreschen Gesetz ein zirkulares Magnetfeld, dessen Stärke am Rand des Drahtes durch

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad (\text{II.1.31})$$

gegeben wird, wobei  $a$  den Radius des Drahtes angibt. Der *in* den Draht gerichtete Poynting-Vektor hat daher den Betrag

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\mu_0} \frac{U}{L} \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \\ &= \frac{UI}{2\pi a L} . \end{aligned} \quad (\text{II.1.32})$$

Die Energie, die pro Zeiteinheit aus dem den Draht umgebenden Feld in den Draht einströmt und dort in Joulesche Wärme umgesetzt wird, ist also

$$S \, 2\pi a L = UI, \quad (\text{II.1.33})$$

was genau der Erwartung entspricht. ■

### II.1.3 Spannungstensor und Impulserhaltung

Betrachte zwei gleiche Ladungen  $q_1$  und  $q_2$ , die mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  entlang der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse geführt werden. Da sich die Ladungen bewegen, werden die von ihnen erzeugten elektrischen Felder *nicht* durch das Coulomb-Gesetz (II.1.5) gegeben, aber dennoch weist, wie später im Detail gezeigt werden wird, das elektrische Feld jeder einzelnen Ladung *radial* von ihrer instantanen Position weg oder zu dieser hin. Da sich bewegende Ladungen weiterhin *keinen stetigen* Strom bilden, wird ihr magnetisches Feld nicht durch das Biot-Savart-Gesetz bestimmt; dennoch folgt der nach wie vor zirkulare Verlauf der Feldlinien der „rechte-Hand-Regel“. In der Abbildung II.1 weist also das von  $q_1$  erzeugte Feld  $\vec{B}_1$  am Ort von  $q_2$  in die Zeichenebene hinein, das von  $q_2$  erzeugte Feld  $\vec{B}_2$  bei  $q_1$  dagegen aus der Zeichenebene heraus:

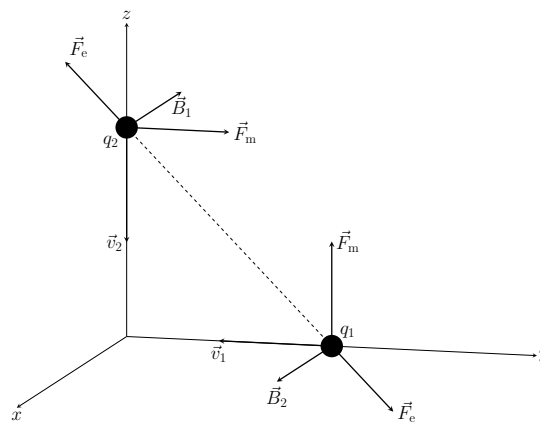


Abbildung II.1: *Felder sich bewegender Punktladungen.* Bewegen sich die Ladungen  $q_1$  und  $q_2$  wie dargestellt in Richtung der negativen  $x$ - bzw.  $y$ -Achse, so weist die Lorentz-Kraft, die jede der beiden Ladungen im jeweils von der anderen Ladung erzeugten magnetischen Feld erfährt, in Richtung der Vektoren  $\vec{F}_m$ , wogegen die elektrischen Kräfte  $\vec{F}_e$  längs der Verbindungslinie beider Teilchen gerichtet sind.

Die Lorentz-Kraft  $\vec{F}_m$ , die  $q_2$  im Feld  $\vec{B}_1$  erfährt, weist dann in Richtung der positiven  $x$ -Achse, wogegen die durch  $\vec{B}_2$  vermittelte Lorentz-Kraft auf  $q_1$  in die positive  $y$ -Richtung zeigt. Die abstoßenden elektrischen Kräfte  $\vec{F}_e$  zwischen den gleichen Ladungen wirken in Richtung ihrer Verbindungsachse. Damit besitzt die gesamte elektromagnetische Kraft, die  $q_1$  auf  $q_2$  ausübt, zwar den gleichen Betrag wie die Kraft, die von  $q_2$  auf  $q_1$  ausgeübt wird, ist aber *nicht* entgegengesetzt gerichtet: In der Elektrodynamik wird daher (anders

als in der Elektro- und Magnetostatik) das dritte Newtonsche Gesetz verletzt - actio ist *nicht* gleich reactio!

Damit scheint nun auch die Impulserhaltung in Gefahr, denn die dafür benötigte Aufhebung aller inneren Kräfte verlangt zwingend die Gleichheit von Kraft und Gegenkraft. Die *einzig*e Möglichkeit, die Impulserhaltung in der vorhin betrachteten Situation zu „retten“ besteht offenbar darin, dem elektromagnetischen Feld selbst einen Impuls zuzuschreiben: Wenn das System der Ladungen mechanischen Impuls verliert, so muss dieser „verlorene“ Impuls vom Feld aufgenommen werden, so dass der Gesamtimpuls trotz der augenscheinlichen Verletzung des dritten Newtonschen Gesetzes erhalten bleibt.

Um diesen „Feldimpuls“ zu erfassen, wird nun die Kraft betrachtet, die ein elektromagnetisches Feld auf die Gesamtheit aller in einem Volumen  $V$  enthaltenen Ladungsträger ausübt:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int_V d^3r \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ &= \int_V d^3r (\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B});\end{aligned}\quad (\text{II.1.34})$$

daher ist

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \quad (\text{II.1.35})$$

die „mechanische Kraftdichte“. Ganz analog zum Vorgehen im vorherigen Abschnitt II.1.2 werden dann die Ladungen und Ströme, die diese Kräfte erfahren, mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen durch die Felder ausgedrückt, die sie verursachen:

$$\vec{f} = \varepsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \times \vec{B}. \quad (\text{II.1.36})$$

Die weiteren Umformungen zielen wieder darauf ab, diesen Ausdruck in eine symmetrische Form zu bringen. Wegen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})\end{aligned}\quad (\text{II.1.37})$$

hat man zunächst

$$\vec{f} = \varepsilon_0 \left[ (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \right] - \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}). \quad (\text{II.1.38})$$

Dann wird eine weitere Produktregel in das Spiel gebracht: Für den Gradienten des Skalarproduktes zweier differenzierbarer Vektorfelder  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  gilt (*Übungsaufgabe!*)

$$\vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}. \quad (\text{II.1.39})$$



Setzt man hier  $\vec{A} = \vec{B} = \vec{E}$ , liefert das

$$\vec{\nabla} \vec{E}^2 = 2\vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + 2(\vec{E} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} . \quad (\text{II.1.40})$$

Ergänzt man im Ausdruck (II.1.38) aus Symmetriegründen noch den Term

$$\frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{B} = \vec{0} ,$$

hat man damit

$$\begin{aligned} \vec{f} = & \varepsilon_0 \left[ (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\vec{E} + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[ (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \right] \\ & - \vec{\nabla} \left[ \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right] - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \times \vec{B}) . \end{aligned} \quad (\text{II.1.41})$$

Dieser noch unübersichtliche Ausdruck lässt sich im nächsten Schritt mit Hilfe des *Maxwell'schen Spannungstensors* sehr stark vereinfachen. In kartesischen Koordinaten besitzt dieser Tensor die Komponenten

$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left( E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right) ; \quad (\text{II.1.42})$$

also etwa

$$T_{xx} = \frac{\varepsilon_0}{2} (E_x^2 - E_y^2 - E_z^2) + \frac{1}{2\mu_0} (B_x^2 - B_y^2 - B_z^2) \quad (\text{II.1.43})$$

oder

$$T_{xy} = \varepsilon_0 E_x E_y + \frac{1}{\mu_0} B_x B_y . \quad (\text{II.1.44})$$

Da ein solcher Tensor eine „zweifach indizierte Größe“ ist, liefert die Divergenzbildung bzgl. des ersten Index einen Vektor:

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \cdot T)_j &= \partial_i T_{ij} \\ &= \varepsilon_0 \left[ (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) E_j + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla}) E_j - \frac{1}{2} \vec{\nabla}_j E^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{\mu_0} \left[ (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) B_j + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) B_j - \frac{1}{2} \vec{\nabla}_j B^2 \right] . \end{aligned} \quad (\text{II.1.45})$$

Damit erhält die Kraftdichte (II.1.41) die kompakte Form

$$\vec{f} = \vec{\nabla} \cdot T - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} , \quad (\text{II.1.46})$$

so dass man mit dem Gauß'schen Integralsatz auf die Beziehung

$$\vec{F} = \int_{\partial V} d\vec{a} \cdot T - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V d^3r \vec{S} \quad (\text{II.1.47})$$

geführt wird. Dabei ergibt das Oberflächenintegral einen Vektor, dessen Komponenten durch Integration des Skalarproduktes des Flächenelementes  $d\vec{a}$  mit den Spaltenvektoren des Spannungstensors  $T$  geliefert werden. Im statischen Fall (bzw. dann, wenn der Poynting-Vektor  $\vec{S}$  zeitunabhängig ist) verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite, so dass dann die Kraft auf eine Ladungs- und Stromkonfiguration durch den Spannungstensor auf ihrer Oberfläche gegeben wird. Genauer:  $T_{ij}$  ist die Kraft pro Einheitsfläche, die in die  $i$ -Richtung auf ein Flächenelement wirkt, das in  $j$ -Richtung orientiert ist. Damit beschreiben die Diagonalelemente von  $T$  *Drücke*, die Nichtdiagonalelemente dagegen *Scherungen*.

Schreibt man die Kraft auf die Ladungsträger als Änderung ihres mechanischen Impulses,

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p}_{\text{mech}} , \quad (\text{II.1.48})$$

so erhält man eine Beziehung, die stark an den Poyntingschen Satz (II.1.24) erinnert:

$$\frac{d}{dt} \vec{p}_{\text{mech}} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V d^3r \vec{S} + \int_{\partial V} d\vec{a} \cdot T . \quad (\text{II.1.49})$$

Demnach ist

$$\vec{p}_{\text{em}} = \int_V d^3r \varepsilon_0 \mu_0 \vec{S} \quad (\text{II.1.50})$$

der von elektromagnetischen Feld „getragene“ Impuls, so dass

$$\vec{\pi}_{\text{em}} = \varepsilon_0 \mu_0 \vec{S} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \quad (\text{II.1.51})$$

die *Impulsdichte* des Feldes bezeichnet. Führt man weiterhin auch eine Impulsdichte  $\vec{\pi}_{\text{mech}}$  für den mechanischen Impuls der Ladungsträger ein, schreibt also

$$\vec{p}_{\text{mech}} = \int_V d^3r \vec{\pi}_{\text{mech}} , \quad (\text{II.1.52})$$

so erhält man aus der Impulsbilanz (II.1.49) die weitere Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\pi}_{\text{mech}} + \vec{\pi}_{\text{em}}) - \vec{\nabla} \cdot T = \vec{0} . \quad (\text{II.1.53})$$

Demnach ist der Gesamtimpuls, der einen mechanischen und einen vom elektromagnetischen Feld getragenen Anteil besitzt, lokal erhalten, und die Spalten des negativen Spannungstensors  $-T$  bilden die Vektoren der Impulsstromdichte, die zu den einzelnen Komponenten der (Gesamt-)Impulsdichte gehören:  $-T_{ij}$  ist der Impuls, der pro Zeiteinheit und pro Einheitsfläche in  $i$ -Richtung durch eine in  $j$ -Richtung orientierte Fläche hindurchtritt.

Das elektromagnetische Feld führt somit ein „Eigenleben“: Es trägt Energie,

$$w_{\text{em}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 ,$$

Impuls,

$$\vec{\pi}_{\text{em}} = \varepsilon_0 \mu_0 \vec{S} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$$

und daher auch Drehimpuls:

$$\begin{aligned} \vec{\lambda}_{\text{em}} &= \vec{r} \times \vec{\pi}_{\text{em}} \\ &= \varepsilon_0 \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}). \end{aligned} \quad (\text{II.1.54})$$

Bemerkenswert ist, dass sogar *statische* Felder Impuls und Drehimpuls besitzen können. Die aus der Mechanik bekannten Erhaltungssätze für diese Größen gelten in der Elektrodynamik nur, wenn die Feldimpulse in die Bilanz einbezogen werden.

■ **Beispiel:** Zur Drehimpulserhaltung in der Elektrodynamik

Eine Spule mit Radius  $R$ , sehr großer Länge  $L$  und  $n$  Windungen pro Einheitslänge wird von einem Strom der Stärke  $I$  durchflossen. Koaxial dazu sind zwei Metallzylinder der Länge  $l < L$  frei drehbar aufgehängt; der eine innerhalb der Spule mit Radius  $a < R$  und homogen verteilter Ladung  $+Q$ , der andere außerhalb der Spule mit Radius  $b > R$  und homogen verteilter Ladung  $-Q$ . Die beiden Zylinder bilden einen Kondensator, der mittig von einem magnetischen Feld durchsetzt wird. Wenn nun der Spulenstrom ausgeschaltet wird, beginnen die Zylinder zu *rotieren*; der dazu benötigte Drehimpuls wird dem Feld entnommen:

*Bevor* der Strom ausgeschaltet wird, hat man zwischen den beiden Zylindern ein radial nach außen gerichtetes Feld  $\vec{E}$  und im Inneren der Spule ein in Richtung der Spulenachse weisendes Feld  $\vec{B}$ . Es werden Zylinderkoordinaten benutzt, wobei die  $z$ -Achse mit der Spulenachse übereinstimmen soll. Das Gauß'sche Gesetz liefert

$$E \, 2\pi r l = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \text{für } a < r < b, \quad (\text{II.1.55})$$

also gilt zwischen den Zylindern

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \frac{1}{r} \vec{e}_r. \quad (\text{II.1.56})$$

Aus dem Ampèreschen Gesetz erhält man

$$BL = \mu_0 n L I \quad (\text{II.1.57})$$

für das magnetische Feld im Spuleninneren; also hat man

$$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z \quad \text{für } r < R. \quad (\text{II.1.58})$$

Zwischen dem inneren Zylinder und der Spule herrscht sowohl ein statisches elektrisches als auch ein dazu senkrechtes statisches magnetisches Feld; die zugehörige Impulsdichte ist

$$\begin{aligned} \vec{\pi}_{\text{em}} &= \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \\ &= \varepsilon_0 \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l} \frac{\mu_0 n I}{r} \vec{e}_r \times \vec{e}_z \\ &= -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi l} \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \quad \text{für } a < r < R. \end{aligned} \quad (\text{II.1.59})$$

Das liefert im Bereich zwischen dem inneren Zylinder und der Spule die Dehimpulsdichte

$$\begin{aligned}\vec{\lambda}_{\text{em}} &= \vec{r} \times \vec{\pi}_{\text{em}} \\ &= -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi l} \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi \\ &= -\frac{\mu_0 n I Q}{2\pi l} \vec{e}_z .\end{aligned}\tag{II.1.60}$$

Der gesamte Drehimpuls, der anfangs im Feld gespeichert ist, beträgt daher

$$\begin{aligned}\vec{\ell}_{\text{em}} &= \vec{\lambda}_{\text{em}} \pi (R^2 - a^2) l \\ &= -\frac{1}{2} \mu_0 n I Q (R^2 - a^2) \vec{e}_z .\end{aligned}\tag{II.1.61}$$

Wenn der Spulenstrom *ausgeschaltet* wird, induziert das verschwindende Magnetfeld ein zirkulares elektrisches Feld: Aus dem Induktionsgesetz erhält man

$$E_\varphi 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \times \begin{cases} \pi r^2 & \text{für } r < R \\ \pi R^2 & \text{für } r > R ; \end{cases}\tag{II.1.62}$$

daraus folgt

$$\vec{E}_\varphi = -\frac{1}{2} \mu_0 n \frac{dI}{dt} \times \begin{cases} r \vec{e}_\varphi & \text{für } r < R \\ \frac{R^2}{r} \vec{e}_\varphi & \text{für } r > R . \end{cases}\tag{II.1.63}$$

Das dadurch auf den inneren Zylinder ausgeübte Drehmoment beträgt

$$\begin{aligned}\vec{M}_a &= a \vec{e}_r \times Q \vec{E}_\varphi \\ &= -\frac{1}{2} \mu_0 n Q a^2 \frac{dI}{dt} \vec{e}_z ;\end{aligned}\tag{II.1.64}$$

der vom inneren Zylinder beim Abschalten des Stromes aufgenommene Drehimpuls ist daher

$$\begin{aligned}\vec{\ell}_a &= -\frac{1}{2} \mu_0 n Q a^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{dI}{dt} \vec{e}_z \\ &= +\frac{1}{2} \mu_0 n Q a^2 I \vec{e}_z .\end{aligned}\tag{II.1.65}$$

Ebenso findet man für den äußeren Zylinder das Drehmoment

$$\begin{aligned}\vec{M}_b &= b \vec{e}_r \times (-Q) \vec{E}_\varphi \\ &= +\frac{1}{2} \mu_0 n Q R^2 \frac{dI}{dt} \vec{e}_z ;\end{aligned}\tag{II.1.66}$$

daraus resultiert der Drehimpuls

$$\vec{\ell}_b = -\frac{1}{2} \mu_0 n Q R^2 I \vec{e}_z .\tag{II.1.67}$$

Ein Vergleich der Gleichungen (II.1.61), (II.1.65) und (II.1.67) zeigt

$$\vec{\ell}_{\text{em}} = \vec{\ell}_a + \vec{\ell}_b, \quad (\text{II.1.68})$$

so dass in der Tat der gesamte Drehimpuls des Feldes beim Abschalten des Spulenstroms als mechanischer Drehimpuls von den beiden Zylindern aufgenommen wird. ■

## II.2 Relativistische Formulierung der Elektrodynamik

Das *Relativitätsprinzip* der Mechanik, das bereits von Galilei erkannt worden war, besagt, dass in allen Inertialsystemen die gleichen mechanischen Gesetze gelten. Man könnte zunächst vermuten, dass ein solches Prinzip in der Elektrodynamik *nicht* existiert: Eine Ladung, die in einem ersten Bezugssystem ruht, erfährt darin nur eine *elektrische* Kraft. Wechselt man dagegen zu einem zweiten Bezugssystem, in dem sich diese Ladung bewegt, so erfährt sie auch eine *magnetische* Kraft. Die gleiche Bewegung scheint je nach Bezugssystem durch „elektrische“ oder „magnetische“ Felder beeinflusst zu werden. In seiner berühmten Arbeit „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“<sup>4</sup> zeigte Albert Einstein jedoch, dass das Relativitätsprinzip auch für die Elektrodynamik uneingeschränkte Gültigkeit besitzt — dass die Maxwell-Gleichungen *relativistisch invariant* sind —, dass aber der Wechsel der Bezugssysteme durch die Galilei-Transformationen nicht korrekt beschrieben wird: An deren Stelle treten andersartige Transformationen, die „Raum“ und „Zeit“ vermischen. Wenn man diesen Ausgangspunkt akzeptiert, lassen sich die Maxwell-Gleichungen aus nur wenigen Grundprinzipien heraus erschließen. Im folgenden Kapitel der Vorlesung wird diese „Relativitätstheorie“ genauer ausgearbeitet werden, so dass schließlich die Bewegungsgleichungen der elektromagnetischen Felder aus einem geeignet konstruierten Wirkungsfunktional gewonnen werden können.

### II.2.1 Lorentz-Transformationen

Unter einem *Inertialsystem* versteht man ein Bezugssystem, in dem sich ein kräftefreier Körper geradlinig-gleichförmig bewegt (bzw. ruht), in dem also der Newtonsche Trägheitssatz gilt. Einstein ging bei seiner Analyse der Elektrodynamik bewegter Körper von zwei Prämissen aus:

- (i) Die Gesetze der Physik (nicht nur die der Mechanik!) gelten in gleicher Form in allen Inertialsystemen.
- (ii) Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist eine absolute Konstante. Sie hat in jedem Bezugssystem den gleichen Wert  $c = 2.99792458 \times 10^8$  m/s, unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle.

Das Postulat (i) weitet den Gültigkeitsbereich des Galileischen Relativitätsprinzips auf die gesamte Physik aus: Alle Bezugssysteme sind „gleichberechtigt“; es gibt kein „absolutes

<sup>4</sup>Annalen der Physik **322**, Nr. 10, S. 891-921 (1905).

Ruhesystem“. Das Postulat (ii) führt dieses Prinzip der Äquivalenz aller Inertialsysteme weiter aus: Gälte es nicht, könnte man entweder in einem einzigen Inertialsystem für verschieden schnell bewegte Lichtquellen auch verschiedene Werte der Lichtgeschwindigkeit messen oder es gäbe, falls die Lichtgeschwindigkeit nicht in allen Systemen den gleichen Wert hätte, eine Hierarchie dieser Systeme (die man dann ja nach dem jeweiligen Wert von  $c$  reihen könnte). Insofern drückt das Postulat (ii) aus, dass die Natur in gewissem Sinne besonders „einfach“ ist. Es zwingt aber dazu, die Vorstellung von einer „absoluten Gleichzeitigkeit“ aufzugeben und damit auch die Newtonsche Vorstellung von einer absoluten Zeit<sup>5</sup> fallenzulassen.

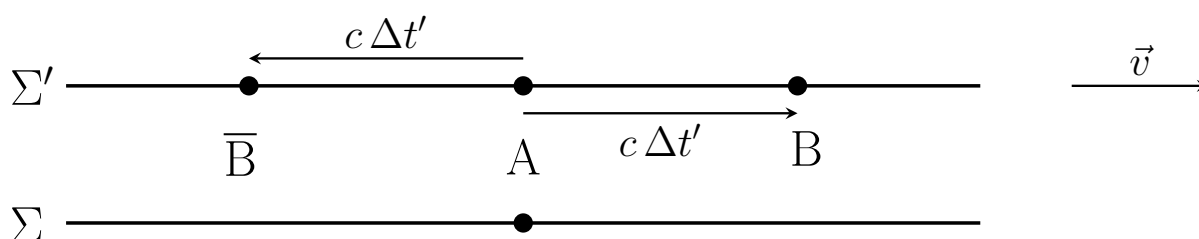


Abbildung II.2: Zum Begriff der Gleichzeitigkeit (I). Das System  $\Sigma'$  bewegt sich relativ zu  $\Sigma$  mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Wird ein Lichtsignal vom Punkt  $A$  ausgesandt, so trifft dieses Signal von  $\Sigma'$  aus gesehen an allen Orten, die von  $A$  gleichweit entfernt sind, *gleichzeitig* ein.

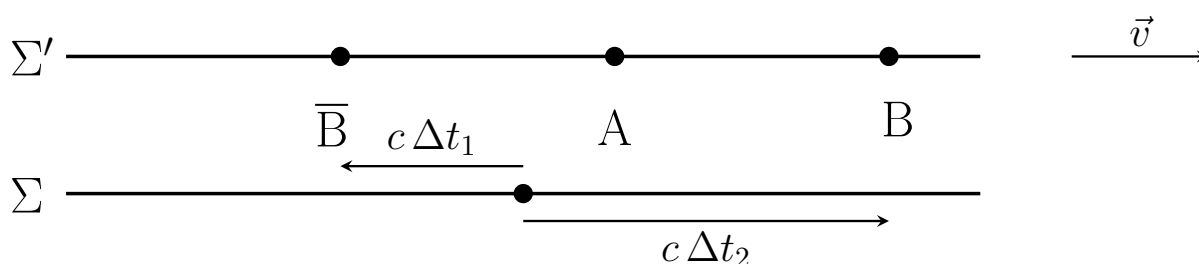


Abbildung II.3: Zum Begriff der Gleichzeitigkeit (II). Für einen Beobachter in  $\Sigma$  bewegt sich der Punkt  $\bar{B}$  auf den Punkt zu, vom dem das Licht ausgesandt wurde, wogegen sich der Punkt  $B$  davon entfernt. Aus seiner Sicht werden daher die Punkte  $\bar{B}$  und  $B$ , die in  $\Sigma'$  gleichweit von  $A$  entfernt sind, *nacheinander* von der Lichtfront getroffen.

<sup>5</sup>„Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand“. Isaac Newton: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1686).

Ein Inertialsystem  $\Sigma'$  bewege sich, wie in der Abbildung **II.2** dargestellt, relativ zu einem anderen System  $\Sigma$  mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Von einem beliebigen Punkt  $A$  wird nun ein Lichtblitz ausgesandt: Ein Beobachter in  $\Sigma'$  registriert dann, dass zwei Punkte  $B$  und  $\bar{B}$ , die in Richtung von  $\vec{v}$  nach „vorne“ bzw. „hinten“ *gleichweit* von  $A$  entfernt sind, *gleichzeitig* von der Lichtfront getroffen werden.

Für einen Beobachter in  $\Sigma$  läuft dagegen  $\bar{B}$  auf die Lichtfront zu, der Punkt  $B$  jedoch von der Lichtfront weg. Entscheidend ist nun, dass für ihn das Licht die *gleiche* Geschwindigkeit  $c$  besitzt wie für einen Beobachter in  $\Sigma'$ , unabhängig davon, ob die Lichtquelle in  $\Sigma$  ruht oder von  $\Sigma'$  „mitgenommen“ wird: Aus seiner Sicht, die in der Abbildung **II.3** angenommen wird, wächst die Entfernung der Lichtfront von  $A$  in Richtung von  $\vec{v}$  *langsamer* als in Gegenrichtung; für ihn wird daher  $\bar{B}$  *eher* vom Licht erreicht als  $B$ . Da aber beide Beobachter die gleichen Ereignisse beschreiben, lässt sich eine wichtige Schlussfolgerung ziehen:

*Zwei Ereignisse, die in einem Inertialsystem gleichzeitig stattfinden, tun dies im Allgemeinen in einem anderen Inertialsystem nicht.*

Will also ein Beobachter in  $\Sigma$  seine Beobachtungen mit denen vergleichen, die ein anderer Beobachter in einem anderen System  $\Sigma'$  zu den *gleichen* Ereignissen anstellt, so darf er dazu *nicht* lediglich die Koordinaten  $x, y, z$  dieser Ereignisse, gemessen in  $\Sigma$ , in die  $\Sigma'$ -Koordinaten  $x', y', z'$  umrechnen, sondern muss auch die Zeitpunkte, an denen die Ereignisse eintreten, in die Umrechnung einbeziehen:  $t \neq t'$  ! Damit unterscheiden sich die Transformationen, die das Postulat (ii) berücksichtigen, wesentlich von den üblichen Galilei-Transformationen: Falls sich  $\Sigma'$  etwa mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  längs der  $x$ -Achse bewegt, lautet eine solche „falsche“ Transformation einfach

$$\begin{aligned} x &= x' + vt \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= t' . \end{aligned} \tag{II.2.1}$$

Wie aber lautet die richtige?

Da Raum und Zeit durch die gesuchte Transformation gemischt werden müssen, ist es sinnvoll, so genannte *Vierervektoren*

$$(ct, \vec{r}) = (ct, x, y, z) \tag{II.2.2}$$

einzuführen, deren „nullte Komponente“ durch die mit der Lichtgeschwindigkeit skalierte Zeit gebildet wird, so dass alle Komponenten die gleiche Dimension tragen. Wird nun zum Zeitpunkt  $t = 0$  vom Ursprung von  $\Sigma$  aus ein Lichtblitz ausgesandt, so erfüllen alle Punkte, die zu einem späteren Zeitpunkt  $t$  auf der Wellenfront liegen, die Gleichung

$$c^2t^2 - \vec{r}^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0 . \tag{II.2.3}$$

Das Postulat (ii) besagt nun, dass diese Wellenfront in einem anderen System  $\Sigma'$ , das sich relativ zu  $\Sigma$  geradlinig-gleichförmig bewegt und dessen Ursprung bei  $t = 0$  mit dem von  $\Sigma$  übereinstimmt, beschrieben wird durch

$$c^2t'^2 - \vec{r}'^2 = c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0 . \tag{II.2.4}$$

Allgemeiner kann man zwei *Weltpunkten*  $(ct_1, \vec{r}_1)$  und  $(ct_2, \vec{r}_2)$  einen (Vierer-)Abstand  $\Delta s$  zuordnen, dessen Quadrat durch

$$\Delta s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2 \quad (\text{II.2.5})$$

gegeben wird. Dieses „Abstandsquadrat“ kann positiv oder negativ sein; es verschwindet genau dann, wenn die beiden Weltpunkte durch ein Lichtsignal verbunden werden können. Die gesuchten Transformationen werden nun genau dadurch charakterisiert, dass sie diesen Abstand invariant lassen: Es gilt

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2. \quad (\text{II.2.6})$$

Um diese entscheidend wichtige Invarianz des Vierer-Abstandes bei Wechsel des Bezugssystems zu begründen, reicht es bereits, sich auf infinitesimale Abstände  $ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2$  zu beschränken. Dann besteht ein Zusammenhang der Form

$$ds'^2 = f(ds^2) \quad (\text{II.2.7})$$

mit einer Funktion  $f$ , die wegen der Kleinheit des Argumentes entwickelt werden kann:

$$ds'^2 = f_0 + \alpha ds^2 + \mathcal{O}((ds^2)^2). \quad (\text{II.2.8})$$

Weil  $ds'^2 = 0$  für  $ds^2 = 0$ , ist zunächst  $f_0 = 0$ . Der Koeffizient  $\alpha$  kann wegen der vorausgesetzten *Homogenität von Raum und Zeit* nicht von  $\vec{r}$  oder  $t$  abhängen; wegen der *Isotropie des Raumes* weiterhin nicht von der Richtung der Relativgeschwindigkeit  $\vec{v}$  von  $\Sigma$  und  $\Sigma'$ . Möglich scheint jedoch eine Abhängigkeit von  $v = |\vec{v}|$ :

$$ds'^2 = \alpha(v) ds^2. \quad (\text{II.2.9})$$

Betrachte nun, wie in Abbildung II.4 skizziert, drei Inertialsysteme  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  und  $\Sigma''$  mit der Relativgeschwindigkeit  $\vec{v}_1$  zwischen  $\Sigma'$  und  $\Sigma$  sowie  $\vec{v}_2$  zwischen  $\Sigma''$  und  $\Sigma$ ; dann ist  $\vec{v}_{21} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$  die Geschwindigkeit von  $\Sigma''$  relativ zu  $\Sigma'$ :

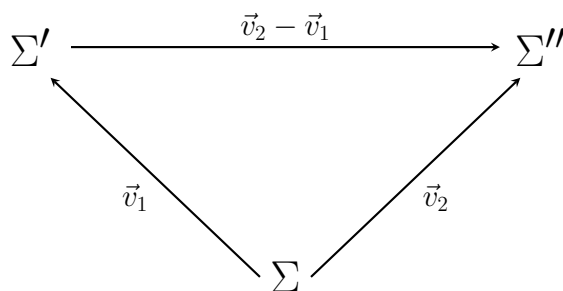


Abbildung II.4: *Zum Wechsel von Bezugssystemen.* Bewegt sich  $\Sigma'$  relativ zu  $\Sigma$  mit  $\vec{v}_1$  und  $\Sigma''$  relativ zu  $\Sigma$  mit  $\vec{v}_2$ , so bewegt sich  $\Sigma''$  relativ zu  $\Sigma'$  mit  $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ .



Dann hat man die drei Beziehungen

$$\begin{aligned} ds'^2 &= \alpha(v_1)ds^2 \\ ds''^2 &= \alpha(v_2)ds^2 \\ ds''^2 &= \alpha(|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|)ds'^2; \end{aligned} \quad (\text{II.2.10})$$

diese führen auf

$$\frac{ds''^2}{ds'^2} = \frac{\alpha(v_2)}{\alpha(v_1)} = \alpha(|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|). \quad (\text{II.2.11})$$

Wegen

$$|\vec{v}_2 - \vec{v}_1| = (v_2^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 + v_1^2)^{1/2} \quad (\text{II.2.12})$$

hängt nun, sofern  $\alpha$  tatsächlich eine Funktion der Geschwindigkeit ist, die rechte Seite dieser Gleichung (II.2.11) vom Winkel zwischen  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  ab, die linke dagegen nicht. Dieser Widerspruch kann nur aufgehoben werden, wenn  $\alpha$  eine *Konstante* ist. Dann hat man

$$\frac{\alpha}{\alpha} = \alpha, \quad (\text{II.2.13})$$

also  $\alpha = 1$  und damit auch  $ds'^2 = ds^2$ ; durch Integration folgt dann die behauptete Identität (II.2.6) auch für beliebig große Abstände zwischen zwei Weltpunkten.

Da sich also die Größe  $\Delta s^2$  bei Transformationen zwischen verschiedenen Inertialsystemen nicht ändert, kann man das *Vorzeichen* von  $\Delta s^2$  zur Klassifikation des Abstandes zwischen zwei Weltpunkten heranziehen:

- (i) Falls  $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta\vec{r}^2 > 0$ , gibt es zwar ein Inertialsystem  $\Sigma'$  mit der Eigenschaft, dass  $\Delta\vec{r}'^2 = 0$ , so dass die beiden betrachteten Ereignisse in  $\Sigma'$  am gleichen Ort stattfinden, aber in *allen* Systemen  $\Sigma'$  gilt  $\Delta t'^2 > 0$ . Abstände mit positiven Quadraten  $\Delta s^2 > 0$  heißen daher *zeitartig*.
- (ii) Falls  $\Delta s^2 < 0$ , gibt es zwar ein System  $\Sigma'$  mit  $\Delta t'^2 = 0$ , so dass die beiden Ereignisse in  $\Sigma'$  gleichzeitig stattfinden, aber in *allen* Systemen  $\Sigma'$  gilt  $\Delta\vec{r}'^2 > 0$ . Abstände mit negativen Quadraten  $\Delta s^2 < 0$  heißen daher *raumartig*.
- (iii) Falls  $\Delta s^2 = 0$ , können die beiden betrachteten Weltpunkte durch ein Lichtsignal verbunden werden. Nullabstände  $\Delta s^2 = 0$  heißen daher *lichtartig*.

Betrachtet man nun aus einem Inertialsystem  $\Sigma$  (dem „Laborsystem“) ein Teilchen, das sich auf einer *beliebigen* Trajektorie bewegt, so gibt es zu jeder Momentangeschwindigkeit  $\vec{v}$  des Teilchens ein Inertialsystem  $\Sigma'$ , das sich relativ zu  $\Sigma$  mit  $\vec{v}$  bewegt (das begleitende Bezugssystem oder „Ruhesystem“ des Teilchens). Während des infinitesimalen Zeitintervalls  $dt$  bewegt sich das Teilchen in  $\Sigma$  um die Strecke  $d\vec{r} = \vec{v}dt$ . Da das Teilchen in  $\Sigma'$  ruht, gilt andererseits  $d\vec{r}' = \vec{0}$ . Die Invarianz von  $ds^2$  liefert dann

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2dt^2 - d\vec{r}^2 \\ &= (c^2 - \vec{v}^2)dt^2 \\ &= c^2dt'^2, \end{aligned} \quad (\text{II.2.14})$$

so dass

$$\begin{aligned} dt' &= \frac{ds}{c} \\ &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt . \end{aligned} \quad (\text{II.2.15})$$

Wenn also im Laborsystem  $\Sigma$  die Zeit  $\Delta t = t_2 - t_1$  vergeht, vergeht im mitbewegten Bezugssystem  $\Sigma'$  die *Eigenzeit*

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{c} . \end{aligned} \quad (\text{II.2.16})$$

Offenbar gilt immer  $\Delta t' < \Delta t$ : *Bewegte Uhren gehen langsamer!*

Zur Konstruktion der gesuchten Transformationen wird nun wieder ein System  $\Sigma'$  betrachtet, das sich wie in Abbildung II.5 relativ zu  $\Sigma$  mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können beide Systeme so orientiert werden, dass  $\vec{v} = v\vec{e}_x$  und die  $x$ -Achse von  $\Sigma$  mit der  $x'$ -Achse von  $\Sigma'$  übereinstimmt. Außerdem werden die Zeitmesser so geeicht, dass für  $t = t' = 0$  beide Koordinatenursprünge zusammenfallen:

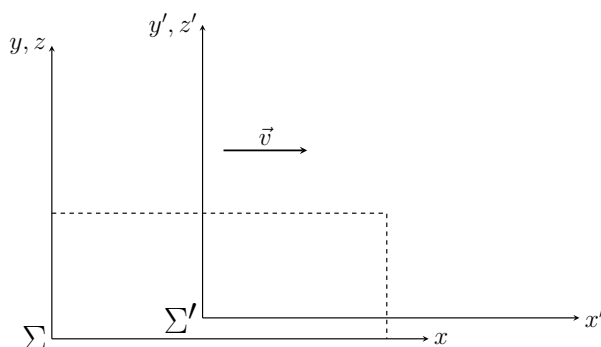


Abbildung II.5: *Zur Herleitung der Lorentz-Transformation.* Das System  $\Sigma'$  bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  relativ zu  $\Sigma$  derart, dass die  $x$ -Achse von  $\Sigma$  mit der  $x'$ -Achse von  $\Sigma'$  übereinstimmt. Zum Zeitpunkt  $t = t' = 0$  fallen beide Ursprünge zusammen.

Die Transformationen, die das Postulat (ii) und damit die Invarianz des Vierer-Abstandes respektieren, verlangen dann

$$\begin{aligned} y &= y' \\ z &= z' , \end{aligned} \quad (\text{II.2.17})$$

wegen die anderen Komponenten der Vierervektoren  $(ct, \vec{r})$  und  $(ct', \vec{r}')$  durch eine *lineare* Transformation verbunden werden:

$$\begin{aligned} ct &= a_{11} ct' + a_{12} x' \\ x &= a_{21} ct' + a_{22} x' . \end{aligned} \quad (\text{II.2.18})$$

Denn eine nichtlineare Transformation würde verschiedene Weltpunkte unterschiedlich bewerten, ist daher nicht verträglich mit der Homogenität von Raum und Zeit. Dann ist einerseits

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= c^2 t^2 - x^2 \\ &= (a_{11} ct' + a_{12} x')^2 - (a_{21} ct' + a_{22} x')^2 \\ &= (a_{11}^2 - a_{21}^2) c^2 t'^2 + 2(a_{11} a_{12} - a_{21} a_{22}) x' ct' + (a_{12}^2 - a_{22}^2) x'^2, \end{aligned} \quad (\text{II.2.19})$$

andererseits

$$\Delta s'^2 = c^2 t'^2 - x'^2. \quad (\text{II.2.20})$$

Die geforderte Gleichheit dieser beiden Ausdrücke liefert für die vier gesuchten Transformationskoeffizienten die drei Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned}a_{11}^2 - a_{21}^2 &= 1 \\ a_{11} a_{12} - a_{21} a_{22} &= 0 \\ a_{22}^2 - a_{12}^2 &= 1. \end{aligned} \quad (\text{II.2.21})$$

Die erste und die dritte dieser Beziehungen erinnert an die Identität  $\cosh^2 \psi - \sinh^2 \psi = 1$ . Setzt man daher

$$a_{21} = \sinh \psi, \quad (\text{II.2.22})$$

folgt

$$\begin{aligned}a_{11} &= \pm \sqrt{1 + \sinh^2 \psi} \\ &= \pm \cosh \psi; \end{aligned} \quad (\text{II.2.23})$$

damit die gesuchte Transformation *stetig* in die Identität übergehen kann, wird das positive Vorzeichen benötigt. Aus der zweiten der Gleichungen (II.2.21) erhält man dann weiter

$$\frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \tanh \psi, \quad (\text{II.2.24})$$

und damit aus der dritten

$$1 - \tanh^2 \psi = \frac{1}{a_{22}^2} \quad (\text{II.2.25})$$

oder

$$a_{22}^2 = \frac{1}{1 - \frac{\sinh^2 \psi}{\cosh^2 \psi}} = \cosh^2 \psi. \quad (\text{II.2.26})$$

Verlangt man wieder die stetige Verbindung mit der identischen Transformation, bedeutet das schließlich

$$\begin{aligned}a_{22} &= \cosh \psi \\ a_{12} &= \sinh \psi. \end{aligned} \quad (\text{II.2.27})$$

Damit hat man nun

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi \\ \sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}, \quad (\text{II.2.28})$$

und es bleibt noch der Parameter  $\psi$  zu bestimmen: Für den Ursprung von  $\Sigma'$  gilt  $x' = 0$ , also reduziert sich die Transformationsgleichung (II.2.28) dafür auf

$$\begin{aligned} ct &= \cosh \psi ct' \\ x &= \sinh \psi ct'. \end{aligned} \quad (\text{II.2.29})$$

Andererseits bewegt sich der Ursprung von  $\Sigma'$  in  $\Sigma$  mit der Relativgeschwindigkeit  $v$ , so dass

$$\frac{x}{ct} = \tanh \psi = \frac{v}{c}. \quad (\text{II.2.30})$$

Damit hat man

$$\cosh \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \psi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{II.2.31})$$

und

$$\sinh \psi = \sqrt{\cosh^2 \psi - 1} = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (\text{II.2.32})$$

Die gesuchten Transformationen erhalten somit die Gestalt

$$\begin{aligned} ct &= \frac{ct' + \frac{v}{c}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x &= \frac{vt' + x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (\text{II.2.33})$$

Dieser „Boost“ entlang der  $x$ -Achse bildet ein spezielles Beispiel für eine *Lorentz-Transformation*; beliebige Lorentz-Transformationen lassen sich durch Verkettung einer Drehung mit einem solchen Boost konstruieren. Im formalen Grenzfall  $c \rightarrow \infty$  erhält man aus dieser Transformation (II.2.33) eine Galilei-Transformation zurück:

$$\begin{aligned} t &= t' \\ x &= x' + vt'. \end{aligned} \quad (\text{II.2.34})$$

Die Umkehrformel gewinnt man offensichtlich, indem man gestrichene und ungestrichene Größen vertauscht und  $v$  durch  $-v$  ersetzt:

$$\begin{aligned} ct' &= \frac{ct - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (\text{II.2.35})$$

Die Lorentz-Transformation, die den „relativistisch korrekten“ Wechsel von Bezugssystemen beschreibt, besitzt einige „populäre“ Konsequenzen. Um diese zu diskutieren, wird zunächst die erste der Gleichungen (II.2.33) in die Form

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2} \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{II.2.36})$$

gebracht. Betrachtet man nun zwei Ereignisse, die in  $\Sigma'$  nacheinander am gleichen Ort stattfinden, so ist  $\Delta x' = 0$  und daher

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (\text{II.2.37})$$

Im Vergleich zum Ruhesystem  $\Sigma'$  erscheinen Zeitintervalle im Laborsystem  $\Sigma$  um den Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 1 \quad (\text{II.2.38})$$

gedehnt; diese *Zeitdilatation* ist die Umkehrung der bereits bekannten Beziehung (II.2.16) für die Eigenzeit.

Betrachtet man weiterhin einen Maßstab der Länge  $l_0$ , der in  $\Sigma'$  ruht und parallel zur  $x$ -Achse ausgerichtet ist, so dass  $l_0 = x'_2 - x'_1$ , so stellt sich die Frage, wie lang dieser Maßstab im Laborsystem ist: Dazu muss ein Beobachter in  $\Sigma$  die Koordinaten  $x_1$  und  $x_2$  von Anfangs- und Endpunkt des Stabes *gleichzeitig* messen. Dann ist  $\Delta t = 0$ ; die Gleichung (II.2.36) liefert daher

$$\Delta t' = -\frac{v}{c^2} \Delta x' = -\frac{v}{c^2} l_0 . \quad (\text{II.2.39})$$

Ein Beobachter in  $\Sigma'$  registriert die „gleichzeitige“ Messung des Beobachters in  $\Sigma$  erwartungsgemäß *nicht* als gleichzeitig. Aus der zweiten der Gleichungen (II.2.33), also aus

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + v \Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{II.2.40})$$

ergibt sich durch Einsetzen die Stablänge in  $\Sigma$  :

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{l_0 + v \left(-\frac{v}{c^2} l_0\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} . \end{aligned} \quad (\text{II.2.41})$$

Damit findet man im Laborsystem eine *Längenkontraktion*: Im Vergleich zu seiner Länge im Ruhesystem erscheint der Stab verkürzt!

Da bei der Bewegung eines Volumens  $V_0$  nur die Ausdehnungen in Bewegungsrichtung im Laborsystem „schrumpfen“, gilt für die Volumenkontraktion eine analoge Beziehung:

$$V = V_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (\text{II.2.42})$$

Abschließend soll noch untersucht werden, wie sich Geschwindigkeiten bei einem Wechsel des Bezugssystems transformieren. Angenommen, ein Massenpunkt bewegt sich in  $\Sigma'$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{u}'$ , legt also in der Zeit  $dt'$  die Strecke  $d\vec{r}' = \vec{u}' dt'$  zurück. Für das Laborsystem  $\Sigma$  bedeutet das

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ dy &= dy' \\ dz &= dz' \\ dt &= \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (\text{II.2.43})$$

und daher

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} \\ &= \frac{u'_x + v}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \\ u_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= \frac{u'_y}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ u_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{u'_z}{1 + \frac{vu'_x}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \end{aligned} \quad (\text{II.2.44})$$

Das ist das „relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten“. Nur im mathematischen Grenzfall  $c \rightarrow \infty$  reduziert es sich auf eine einfache Vektoraddition: Dann ist

$$\begin{aligned} u_x &= u'_x + v \\ u_y &= u'_y \\ u_z &= u'_z. \end{aligned} \quad (\text{II.2.45})$$

Sind  $\vec{u}'$  und  $\vec{v}$  gleichgerichtet, weisen also beide zu „addierenden“ Vektoren in Richtung der  $x$ -Achse, ist  $u'_x = u'$  und  $u'_y = u'_z = 0$ . Das liefert sofort

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{vu'}{c^2}}, \quad (\text{II.2.46})$$

wobei  $u = u_x$ , da auch  $u_y = u_z = 0$ . Erfolgt die Bewegung in  $\Sigma'$  insbesondere mit Lichtgeschwindigkeit, so dass  $u' = c$ , folgt daraus

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = c, \quad (\text{II.2.47})$$

wie es sein muss: Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Bezugssystemen gleich. Bewegt sich dagegen  $\Sigma'$  selbst mit Lichtgeschwindigkeit relativ zu  $\Sigma$ , so dass  $v = c$ , und erfolgt in  $\Sigma'$  eine Bewegung mit der Geschwindigkeit  $u'$ , so ist dennoch

$$u = \frac{u' + c}{1 + \frac{u'}{c}} = c. \quad (\text{II.2.48})$$

In einem Bezugssystem, das sich gegenüber einem Laborsystem mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, scheint aus der Sicht des Laborsystems die Zeit stillzustehen: Ein Lichtsignal, das von einer Quelle im bewegten System ausgesandt wird, scheint sich im Laborsystem nicht von dieser Quelle zu entfernen.

## II.2.2 Tensorkalkül

Die im vorherigen Abschnitt konstruierte Lorentz-Transformation (II.2.17), (II.2.28) für einen Boost entlang der  $x$ -Achse, also

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi & 0 & 0 \\ \sinh \psi & \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad (\text{II.2.49})$$

erinnert stark an eine *Drehung* eines Koordinatensystems. Während aber eine „normale“ Drehung im *dreidimensionalen* Raum durchgeführt wird und das nichtnegative euklidische Abstandsquadrat

$$(\Delta\vec{r})^2 = \sum_{i=1}^3 (\Delta x_i)^2 \quad (\text{II.2.50})$$

und damit auch den Abstand  $|\Delta\vec{r}|$  zweier Punkte unverändert lässt, wirken die Lorentz-Transformationen auf dem *vierdimensionalen* linearen Raum aller Weltpunkte, der nach dem Mathematiker Hermann Minkowski als *Minkowski-Raum* bezeichnet wird, und erhalten das indefinite Quadrat des Vierer-Abstandes zweier solcher Weltpunkte,

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - (\Delta\vec{r})^2. \quad (\text{II.2.51})$$

Das mögliche Auftauchen negativer Abstandsquadrate sprengt den Rahmen der euklidischen Geometrie, allerdings in formaler Hinsicht nicht sehr. Man spricht daher hier von einer *pseudoeuklidischen Geometrie* bzw. von einer *pseudoeuklidischen Metrik*, die in dieser speziellen Form auch Minkowski-Geometrie bzw. *Minkowski-Metrik* genannt wird. Es

ist sehr sinnvoll und hilfreich, in diesem Zusammenhang zunächst einige allgemeinere geometrische Konzepte einzuführen, die dann bei der Anwendung auf die Beschreibung von Operationen im vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuum, also im Minkowski-Raum, eine besonders einfache Gestalt annehmen.

In einem  $d$ -dimensionalen reellen Vektorraum, der eine Basis  $\{e_1, \dots, e_d\}$  besitzen soll, kann ein beliebiger Vektor  $A$  in der Form

$$A = \sum_{i=1}^d A^i e_i \quad (\text{II.2.52})$$

dargestellt werden, wobei die Koeffizienten  $\{A^1, \dots, A^d\}$ , also die Komponenten des Vektors  $A$  bezüglich der gegebenen Basis, eindeutig bestimmt sind. Die *Einsteinsche Summenkonvention* soll hier in der Form verwendet werden, dass stets über doppelt vorkommende Indizes zu summieren ist, sofern einer dieser Indizes „oben“ und der andere „unten“ auftritt, also

$$A = A^i e_i . \quad (\text{II.2.53})$$

Weiterhin sollen für dreidimensionale Vektoren *lateinische* Indizes und Vektorpfeile verwendet werden,

$$\vec{A} = A^1 \vec{e}_1 + A^2 \vec{e}_2 + A^3 \vec{e}_3 . \quad (\text{II.2.54})$$

Vierervektoren als Elemente des Minkowski-Raumes (und vorläufig auch Elemente beliebiger anderer linearer Räume) werden dagegen mit *griechischen* Indizes und ohne Vektorpfeile geschrieben:

$$A^\mu e_\mu = A^0 e_0 + A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3 . \quad (\text{II.2.55})$$

Für den Fall, dass  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  eine Orthonormalbasis des  $\mathbb{R}^3$  bilden, erhält man die Komponenten von  $\vec{A}$  durch Bildung der entsprechenden Skalarprodukte,

$$\vec{A} \cdot \vec{e}_i = A^i . \quad (\text{II.2.56})$$

Im allgemeinen Fall müssen die Basisvektoren  $e_\mu$  jedoch *nicht* aufeinander senkrecht stehen,  $e_\mu \cdot e_\nu \neq 0$  für  $\mu \neq \nu$ , und auch *nicht* normiert sein,  $e_\mu \cdot e_\mu \neq 1$ .<sup>6</sup> Um dennoch die Komponenten eines Vektors auch bezüglich einer solchen „schiefen“ Basis einfach erhalten zu können, konstruiert man neben der gegebenen Basis  $\{e_\mu; \mu = 1, \dots, d\}$  noch eine zweite Basis  $\{e^\mu; \mu = 1, \dots, d\}$ , die durch die Bedingungen

$$e^\mu \cdot e_\nu = \delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases} \quad (\text{II.2.57})$$

bestimmt wird. Diese neue Basis (mit hochgestellten Indizes) wird *kontravariant* genannt, die ursprünglich gegebene (mit tiefgestellten Indizes) dagegen *kovariant*. Für einen Vektor

<sup>6</sup>Hier keine Summation: *Beide* Indizes stehen unten!



$A = A^\mu e_\mu$  gelten dann die Beziehungen

$$\begin{aligned} A \cdot e^\nu &= A^\mu e_\mu \cdot e^\nu \\ &= A^\mu \delta_\mu^\nu \\ &= A^\nu . \end{aligned} \tag{II.2.58}$$

Da also hier die Komponenten  $A^\nu$  aus den Skalarprodukten von  $A$  mit den *kontravarianten* Basisvektoren  $e^\nu$  hervorgehen, werden auch sie als *kontravariant* bezeichnet. In gleicher Weise kann man nun auch *kovariante* Komponenten einführen: Mit den Definitionen

$$A_\nu = A \cdot e_\nu \tag{II.2.59}$$

hat man auch die Identität

$$A = A_\nu e^\nu . \tag{II.2.60}$$

Für das Skalarprodukt zweier Vektoren  $A$  und  $B$  findet man daher mehrere äquivalente Darstellungen:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= A^\mu e_\mu \cdot B_\nu e^\nu \\ &= A^\mu B_\nu \delta_\mu^\nu \\ &= A^\mu B_\mu \end{aligned} \tag{II.2.61}$$

oder

$$\begin{aligned} A \cdot B &= A^\mu e_\mu \cdot B^\nu e_\nu \\ &= A^\mu B^\nu e_\mu \cdot e_\nu \\ &= A^\mu B^\nu g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{II.2.62}$$

oder auch

$$\begin{aligned} A \cdot B &= A_\mu e^\mu \cdot B_\nu e^\nu \\ &= A_\mu B_\nu e^\mu \cdot e^\nu \\ &= A_\mu B_\nu g^{\mu\nu} , \end{aligned} \tag{II.2.63}$$

wobei in der Form (II.2.62) der *kovariante metrische Tensor* (kurz: die „kovariante Metrik“)

$$g_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu \tag{II.2.64}$$

und in der Form (II.2.63) der *kontravariante metrische Tensor* (die „kontravariante Metrik“)

$$g^{\mu\nu} = e^\mu \cdot e^\nu \tag{II.2.65}$$

eingeführt wurden. Aufgrund der Symmetrie des Skalarproduktes sind auch diese Tensoren symmetrisch:

$$g^{\nu\mu} = g^{\mu\nu} \quad , \quad g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu} . \tag{II.2.66}$$

Durch Bildung der Differenzen der verschiedenen Ausdrücke für das Skalarprodukt findet man sofort

$$0 = A^\mu (B_\mu - B^\nu g_{\mu\nu}) \quad (\text{II.2.67})$$

und

$$0 = (A^\mu - A_\nu g^{\mu\nu}) B_\mu ; \quad (\text{II.2.68})$$

das ergibt

$$\begin{aligned} B_\mu &= g_{\mu\nu} B^\nu \\ A^\mu &= g^{\mu\nu} A_\nu . \end{aligned} \quad (\text{II.2.69})$$

Man kann daher mit Hilfe des metrischen Tensors „Indizes hoch- oder runterziehen“, d.h. kovariante Komponenten in kontravariante verwandeln oder umgekehrt; dieser wichtige Befund wird in *sehr* vielen Umformungen ausgenutzt werden. Damit findet man auch die Beziehung

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu = g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} A^\rho = \delta_\rho^\mu A^\rho , \quad (\text{II.2.70})$$

also ist  $g^{\mu\nu}$  das Inverse zu  $g_{\mu\nu}$  :

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu . \quad (\text{II.2.71})$$

Das Konzept der Metrik (genauer: des metrischen Tensors) erlaubt es also, die geometrischen Gegebenheiten *ohne* Benutzung der Basisvektoren zu beschreiben: Man könnte sich eine beliebige Phantasiemetrik  $g_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu$  vorgeben und die daraus folgende „nicht-euklidische Geometrie“ ausloten.

Um diese Idee nun insbesondere auf das vierdimensionale Raum-Zeit-Kontinuum anwenden zu können, fasst man die Komponenten eines Vierervektors  $(ct, \vec{r})$  als die *kontravarianten* Komponenten eines Elementes des Minkowski-Raumes auf:

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) ; \quad (\text{II.2.72})$$

entsprechend ist dann

$$(dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) = (cdt, dx, dy, dz) . \quad (\text{II.2.73})$$

Das Quadrat des „Vierer-Abstandes“ zweier infinitesimal benachbarter Weltpunkte wird dann als Skalarprodukt ihres Verbindungsvektors mit sich selbst interpretiert:

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - d\vec{r}^2 \\ &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \\ &= dx_\mu dx^\mu \\ &= g_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu ; \end{aligned} \quad (\text{II.2.74})$$

dabei wird allerdings die Forderung der Positiv-Definitheit, die an ein übliches Skalarprodukt gestellt wird, fallengelassen. Das erlaubt nun die Identifikation des zugehörigen metrischen Tensors, d.h. der *Minkowski-Metrik*:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (\text{II.2.75})$$

aus der Gleichung (II.2.71) erhält man dafür sogar

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}. \quad (\text{II.2.76})$$

Die allgemeine Beziehung  $x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu$  liefert nun sofort

$$x_\mu = (ct, -\vec{r}). \quad (\text{II.2.77})$$

Dieser Zusammenhang ist derart wichtig, dass er eigens festgehalten werden soll:

*Die kovariante Darstellung eines Vierervektors im Minkowski-Raum unterscheidet sich von der kontravarianten nur durch die Vorzeichen der räumlichen Komponenten.*

Man kann nun anhand des Verhaltens bei einem Wechsel des Bezugssystems, also unter Lorentz-Transformationen, verschiedene Objekte unterscheiden:

- (i) *Skalare* (genauer: Lorentz-Skalare) sind (einkomponentige) Größen, die in allen Bezugssystemen den gleichen Wert haben. Dazu gehören etwa das Abstandsquadrat  $\Delta s^2$  zweier Weltpunkte, aber auch die Masse oder die Ladung eines Teilchens.
- (ii) *Vektoren* sind (vierkomponentige) Größen, die sich unter Lorentz-Transformationen ebenso verhalten wie der prototypische Vierervektor  $(ct, \vec{r}) = x^\mu$ . Für diese ist die Lorentz-Transformation eine lineare Beziehung  $x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x'^\nu$ , so dass

$$\begin{aligned} dx^\mu &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu dx'^\nu \end{aligned} \quad (\text{II.2.78})$$

mit einer Transformationsmatrix  $\Lambda^\mu{}_\nu$ , wie sie für einen Boost entlang der  $x$ -Achse in Gleichung (II.2.49) angegeben ist. Für *jeden* anderen Vierervektor  $A^\mu$  gilt dann

$$A^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A'^\nu \quad (\text{II.2.79})$$

mit den *gleichen* Matrizen  $\Lambda^\mu{}_\nu$ . Da nun  $ds^2 = dx^\mu dx_\mu$  ein Lorentz-Skalar ist, hat man

$$\begin{aligned} dx^\mu dx_\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu dx'^\nu \Lambda_\mu{}^\rho dx'_\rho \\ &= dx'^\nu dx'_\nu \end{aligned} \quad (\text{II.2.80})$$

und daher

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\rho = \delta_\nu^\rho \quad (\text{II.2.81})$$

als charakteristische Eigenschaft einer Lorentz-Transformationsmatrix. Somit gilt auch

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu{}^\rho A^\mu &= \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda^\mu{}_\nu A'^\nu \\ &= A'^\rho . \end{aligned} \quad (\text{II.2.82})$$

- (iii) *Tensoren zweiter Stufe* sind „zweifach indizierte Größen“, bestehen also aus 16 Komponenten, die sich bezüglich eines jeden der beiden Indizes wie ein Vektor transformieren: Für einen solchen Tensor gilt daher

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma T'^{\rho\sigma} \\ T_\mu{}^\nu &= \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda^\nu{}_\sigma T'^{\rho\sigma} , \end{aligned} \quad (\text{II.2.83})$$

usw. Unter einer „Verjüngung“ eines Tensors versteht man die Spurbildung

$$T^\mu{}_\mu = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} ; \quad (\text{II.2.84})$$

jeder Tensor zweiter Stufe kann gemäß der Gleichung

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}) + \frac{1}{2} (T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}) \quad (\text{II.2.85})$$

in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Tensor zerlegt werden.

- (iv) *Tensoren m-ter Stufe* sind „m-fach indizierte Größen“, bestehen also aus  $4^m$  Komponenten, die sich bezüglich eines jeden dieser Indizes wie ein Vektor transformieren. Ein besonders wichtiges Beispiel liefert der *vollständig antisymmetrische Tensor vierter Stufe*, dessen kontravariante Form durch  $\varepsilon^{0123} = 1$  festgelegt wird. (*Übungsaufgabe!*)

Schließlich wird noch das Transformationsverhalten von Differentialoperatoren benötigt. Betrachtet man dazu den Gradienten

$$\frac{\partial f}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial f}{\partial x^\nu} , \quad (\text{II.2.86})$$

so sieht man, dass sich die partiellen Ableitungen nach den *kontravarianten* Komponenten, also

$$\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \left( \frac{\partial}{\partial ct}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{II.2.87})$$

wie ein *kovarianter* Vektor transformieren; umgekehrt hat man

$$\partial^\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu} = \left( \frac{\partial}{\partial ct}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) . \quad (\text{II.2.88})$$

Damit schreibt sich dann die Vierer-Divergenz eines Vektorfeldes in der Form

$$\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu . \quad (\text{II.2.89})$$

### II.2.3 Relativistische Mechanik eines freien Teilchens

Gesucht wird nun das Wirkungsfunktional eines relativistischen freien Teilchens, also ein Funktional  $S$  seiner *Weltlinie*, das längs der tatsächlich durchlaufenen Weltlinie stationär (minimal) wird. Dieses Funktional muss ein Lorentz-Skalar sein, d.h. unter Lorentz-Transformationen invariant bleiben. Außerdem kann das Wirkungsfunktional eines freien Teilchens, das ja in seinem begleitenden Inertialsystem für alle Zeiten ruht, *nur* von skalaren Größen abhängen, um nicht die Homogenität und Isotropie des Raumes zu verletzen. Der *einzig*e Skalar, der noch für die Konstruktion des Wirkungsfunktionals zur Verfügung steht, ist der Minkowski-Abstand  $ds$ . Man hat also

$$S = -\alpha \int_{P_1}^{P_2} ds \quad (\text{II.2.90})$$

mit einer noch festzulegenden Konstanten  $\alpha$ , wobei das Integral längs der Weltlinie, die das Argument des Funktionals bildet, auszuwerten ist.

Zur Vorbereitung der Variation dieser Wirkung (II.2.90) wird die *Vierer-Geschwindigkeit* eines Teilchens eingeführt: Sie ist definiert durch

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \quad \text{bzw.} \quad u_\mu = \frac{dx_\mu}{ds} \quad (\text{II.2.91})$$

und damit insbesondere dimensionslos. Wegen

$$ds^2 = (cdt)^2 - d\vec{r}^2 \quad (\text{II.2.92})$$

hat man wie üblich

$$ds = cdt \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (\text{II.2.93})$$

Daher erhalten die *räumlichen* Komponenten von  $u$  die Gestalt

$$\begin{aligned} u^i &= \frac{dx^i}{ds} \\ &= \frac{dx^i}{cdt \sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{v^i/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \end{aligned} \quad (\text{II.2.94})$$

die *zeitliche* Komponente ist einfach

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{dx^0}{ds} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \quad (\text{II.2.95})$$

Daraus ergibt sich insgesamt der Vierervektor

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left( 1, \frac{\vec{v}}{c} \right) \quad \text{bzw.} \quad u_\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left( 1, -\frac{\vec{v}}{c} \right). \quad (\text{II.2.96})$$

Wie für jeden Vierervektor, so ist auch für  $u$  die Kontraktion mit sich selbst eine Lorentz-Invariante: Man hat

$$\begin{aligned}
 u^\mu u_\mu &= \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx_\mu}{ds} \\
 &= g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \\
 &= \frac{ds^2}{ds^2} \\
 &= 1 .
 \end{aligned} \tag{II.2.97}$$

Nun zurück zur Variation des Wirkungsfunktional (II.2.90). Die von einem freien Teilchen tatsächlich durchlaufene Weltlinie bestimmt sich aus der Forderung

$$\begin{aligned}
 \delta S &= -\alpha \delta \int_{P_1}^{P_2} ds \\
 &= -\alpha \int_{P_1}^{P_2} \delta \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \\
 &= 0 .
 \end{aligned} \tag{II.2.98}$$

Die hier benötigte Variation des Abstandselementes kann nach kurzer Rechnung auf die Vierer-Geschwindigkeit (II.2.91) zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned}
 \delta ds &= \delta \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \\
 &= \sqrt{g_{\mu\nu} d(x^\mu + \delta x^\mu) d(x^\nu + \delta x^\nu)} - \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \\
 &= \sqrt{g_{\mu\nu} (dx^\mu dx^\nu + d\delta x^\mu dx^\nu + dx^\mu d\delta x^\nu)} - ds \\
 &= ds \sqrt{1 + g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu dx^\nu}{ds^2} + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu d\delta x^\nu}{ds^2}} - ds \\
 &= \frac{1}{2} \left( g_{\mu\nu} u^\nu d\delta x^\mu + g_{\mu\nu} u^\mu d\delta x^\nu \right) \\
 &= u_\mu d\delta x^\mu ,
 \end{aligned} \tag{II.2.99}$$

wobei quadratisch kleine Terme unterdrückt wurden. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \delta S &= -\alpha \int_{P_1}^{P_2} u_\mu d\delta x^\mu \\
 &= -\alpha \int_{P_1}^{P_2} u_\mu \frac{d\delta x^\mu}{ds} ds \\
 &= -\alpha u_\mu \delta x^\mu \Big|_{P_1}^{P_2} + \alpha \int_{P_1}^{P_2} \frac{du_\mu}{ds} \delta x^\mu ds .
 \end{aligned} \tag{II.2.100}$$

Die Randterme verschwinden, wenn man, wie schon in Gleichung (II.2.98) vorausgesetzt, nur solche Variationen  $\delta x^\mu$  betrachtet, bei denen Anfangs- und Endpunkt festgehalten werden. Damit führt die Forderung  $\delta S = 0$  sofort auf

$$\frac{du_\mu}{ds} = 0 . \quad (\text{II.2.101})$$

Das ist unmittelbar einleuchtend, da der Ausdruck auf der linken Seite in Analogie zur Definition (II.2.91) die Vierer-Beschleunigung bezeichnet; ein relativistisches freies Teilchen bewegt sich derart, dass seine Vierer-Beschleunigung verschwindet.

Um die im Ansatz (II.2.90) noch offene Konstante festzulegen, verwendet man wieder die bekannte Beziehung

$$ds = c dt \sqrt{1 - v^2/c^2} ,$$

womit das Integral über die Weltlinie in eines über die Zeit umgeschrieben werden kann:

$$S = -\alpha c \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - v^2/c^2} . \quad (\text{II.2.102})$$

Im Hinblick auf die Definition der Eigenzeit (II.2.16) lässt diese Formulierung eine interessante Interpretation zu: Das freie Teilchen bewegt sich derart, dass seine Wirkung minimal und daher seine Eigenzeit maximal wird. Die Darstellung (II.2.102) erlaubt zudem die Identifizierung der Lagrange-Funktion des relativistischen freien Teilchens:

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - v^2/c^2} . \quad (\text{II.2.103})$$

Im *nichtrelativistischen Grenzfall*, also für  $v/c \ll 1$ , erhält man daraus

$$\begin{aligned} L &= -\alpha c \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \mathcal{O}((v/c)^4) \right] \\ &= -\alpha c + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{c} v^2 + \text{h.o.t.} \end{aligned} \quad (\text{II.2.104})$$

Der konstante Term ist für das Variationsprinzip unerheblich, aber der in  $v$  quadratische Beitrag muss mit der nichtrelativistischen Lagrange-Funktion

$$L_{\text{nr}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (\text{II.2.105})$$

übereinstimmen: Das liefert nun

$$\alpha = m c , \quad (\text{II.2.106})$$

so dass

$$S = -m c \int_{P_1}^{P_2} ds \quad (\text{II.2.107})$$

und

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} . \quad (\text{II.2.108})$$

Nachdem somit die Lagrange-Funktion vollständig bekannt ist, kann auch der kanonische Impuls des relativistischen freien Teilchens angegeben werden:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \\ &= -mc^2 \frac{(-\vec{v}/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ; \end{aligned} \quad (\text{II.2.109})$$

im nichtrelativistischen Grenzfall wird daraus die bekannte Beziehung  $\vec{p} = m\vec{v}$ . Der Vergleich mit der Vierer-Geschwindigkeit

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left( 1, \frac{\vec{v}}{c} \right)$$

zeigt, dass die Komponenten von  $\vec{p}$  aufgefasst werden können als *räumliche* Komponenten eines Vierervektors

$$p^\mu = mc u^\mu , \quad (\text{II.2.110})$$

dessen *zeitliche* („nullte“) Komponente durch

$$p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (\text{II.2.111})$$

gegeben wird. Die Bedeutung dieser Größe lässt sich erkennen, wenn man auch die Hamiltonfunktion des relativistischen freien Teilchens berechnet: In einem ersten Schritt erhält man sofort

$$\begin{aligned} H &= \vec{p} \cdot \vec{v} - L \\ &= \frac{mv^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \end{aligned} \quad (\text{II.2.112})$$

Da nun diese Funktion mit der Energie  $E$  des Teilchens übereinstimmt, gilt

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} , \quad (\text{II.2.113})$$

so dass

$$p^0 = \frac{E}{c} . \quad (\text{II.2.114})$$



Daher wird der Vierervektor  $p^\mu$  als *Energie-Impuls-Vektor* bezeichnet:

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad \text{bzw.} \quad p_\mu = \left( \frac{E}{c}, -\vec{p} \right). \quad (\text{II.2.115})$$

Auffallend ist, dass  $E$  für  $v/c \rightarrow 0$  *nicht* verschwindet; vielmehr besitzt das Teilchen eine von Null verschiedene *Ruheenergie*

$$E_0 = mc^2. \quad (\text{II.2.116})$$

Im Sinne des kanonischen Formalismus muss schließlich noch die Hamiltonfunktion durch den kanonischen Impuls ausgedrückt werden. Dazu benutzt man die Beziehung

$$\begin{aligned} p_\mu p^\mu &= m^2 c^2 u_\mu u^\mu \\ &= m^2 c^2, \end{aligned} \quad (\text{II.2.117})$$

wobei die Lorentz-Invariante (II.2.97) verwendet wurde, und erhält daraus sofort

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2, \quad (\text{II.2.118})$$

also die *relativistische Energie-Impuls-Beziehung*

$$\begin{aligned} H &= E \\ &= \sqrt{(\vec{p}c)^2 + (mc^2)^2}. \end{aligned} \quad (\text{II.2.119})$$

## II.2.4 Relativistische Mechanik eines geladenen Teilchens

Die Lorentz-Invarianz einer physikalischen Größe ist eine zwingende Konsequenz der beiden als gültig vorausgesetzten Postulate (i) und (ii), die zu Beginn des Abschnitts II.2.1 formuliert worden sind. Sie hat weitreichende Auswirkungen, da sie die mögliche mathematische Gestalt dieser Größe bereits weitgehend festlegt. So *muss* das Wirkungsfunktional (II.2.107) eines freien Teilchens, nämlich

$$S_{\text{Teilchen}} = -mc \int_{P_1}^{P_2} ds,$$

sehr einfach sein, weil neben  $ds$  kein weiteres „Bauelement“ für die Konstruktion einer Lorentz-invarianten Wirkung zur Verfügung steht. Angenommen jedoch, das Raum-Zeit-Kontinuum wird durchsetzt von einem „Viererefeld“  $A^\mu = A^\mu(x^\nu)$ , das mit dem Teilchen wechselwirkt, ohne dass dieses Feld an dieser Stelle bereits näher spezifiziert werden soll. Eine Lorentz-invariante Wirkung für eine in dem Feld *lineare* Theorie wird dann gegeben durch

$$\begin{aligned} S &= S_{\text{Teilchen}} + S_{WW} \\ &= -mc \int_{P_1}^{P_2} ds - \alpha \int_{P_1}^{P_2} A_\mu dx^\mu, \end{aligned} \quad (\text{II.2.120})$$

wobei die *Kopplungskonstante*  $\alpha$  die Stärke der Wechselwirkung des Feldes mit dem Teilchen angibt.<sup>7</sup> Die Konsequenzen dieses Ansatzes (II.2.120) sollen nun zunächst „rein theoretisch“ erschlossen werden; erst später wird anhand dieser Konsequenzen die naheliegende Frage beantwortet, „ob es eine solche Theorie in der Natur überhaupt gibt“. Die Bewegungsgleichung, der das Teilchen unter dem Einfluss des vorgegebenen Feldes gehorcht, ergibt sich wieder aus der Stationarität des Wirkungsfunktionalis:

$$\delta S = -mc \delta \int_{P_1}^{P_2} ds - \alpha \delta \int_{P_1}^{P_2} A_\mu dx^\mu = 0, \quad (\text{II.2.121})$$

wobei wie üblich der Anfangspunkt  $P_1$  der Weltlinie sowie ihr Endpunkt  $P_2$  bei der Variation festgehalten werden. Der erste der beiden benötigten Ausdrücke ist bereits aus der Umformung (II.2.100) bekannt:

$$\delta S_{\text{Teilchen}} = mc \int_{P_1}^{P_2} \frac{du_\mu}{ds} \delta x^\mu ds. \quad (\text{II.2.122})$$

Die Berechnung des zweiten Beitrages geht nun aus von der Zerlegung

$$\delta S_{\text{WW}} = -\alpha \int_{P_1}^{P_2} (\delta A_\mu dx^\mu + A_\mu \delta dx^\mu). \quad (\text{II.2.123})$$

Dann findet man mit  $u^\mu = dx^\mu/ds$  einerseits

$$\begin{aligned} \int_{P_1}^{P_2} \delta A_\mu dx^\mu &= \int_{P_1}^{P_2} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\rho} \delta x^\rho dx^\mu \\ &= \int_{P_1}^{P_2} \partial_\rho A_\mu \delta x^\rho u^\mu ds, \end{aligned} \quad (\text{II.2.124})$$

andererseits

$$\begin{aligned} \int_{P_1}^{P_2} A_\mu \delta dx^\mu &= \int_{P_1}^{P_2} d(A_\mu \delta x^\mu) - \int_{P_1}^{P_2} dA_\mu \delta x^\mu \\ &= A_\mu \delta x^\mu \Big|_{P_1}^{P_2} - \int_{P_1}^{P_2} \delta x^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\rho} dx^\rho \\ &= - \int_{P_1}^{P_2} \delta x^\mu \partial_\rho A_\mu u^\rho ds. \end{aligned} \quad (\text{II.2.125})$$

Nach einer sich offensichtlich anbietenden Umbenennung der Indizes auf der rechten Seite der Gleichung (II.2.124) lassen sich alle Beiträge in günstiger Weise zusammenfassen:

$$\delta S = mc \int_{P_1}^{P_2} \frac{du_\mu}{ds} \delta x^\mu ds - \alpha \int_{P_1}^{P_2} (\partial_\mu A_\rho - \partial_\rho A_\mu) u^\rho \delta x^\mu ds. \quad (\text{II.2.126})$$

<sup>7</sup>Diese Konstante hat natürlich nichts mit dem Faktor  $\alpha$  zu tun, der in Gleichung (II.2.90) noch offen gelassen wurde und später in Gleichung (II.2.106) durch Vergleich mit dem nichtrelativistischen Grenzfall identifiziert werden konnte.

Definiert man nun zur Abkürzung den antisymmetrischen Tensor

$$F_{\mu\rho} = \partial_\mu A_\rho - \partial_\rho A_\mu, \quad (\text{II.2.127})$$

so führt die Forderung nach der Stationarität des Wirkungsfunktional (II.2.120), also  $\delta S = 0$ , sofort auf die Bewegungsgleichung

$$mc \frac{du_\mu}{ds} = \alpha F_{\mu\rho} u^\rho. \quad (\text{II.2.128})$$

Berücksichtigt man jetzt noch Gleichung (II.2.110) und schreibt  $mcu_\mu = p_\mu$ , so erhält man insgesamt die folgende sehr allgemeine Aussage:

*Koppelt ein Teilchen der Masse  $m$  gemäß der Lorentz-invarianten Wirkung*

$$S = -mc \int_{P_1}^{P_2} ds - \alpha \int_{P_1}^{P_2} A_\mu dx^\mu$$

*an ein Vektorfeld  $A_\mu$ , so lautet seine Bewegungsgleichung*

$$\frac{dp_\mu}{ds} = \alpha F_{\mu\nu} u^\nu,$$

*wobei*

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Nun zurück zu der Frage, ob eine solche Theorie für das tatsächliche Naturgeschehen von Bedeutung ist: Schreibt man die postulierte Wirkung  $S$  in der Form

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \alpha A_0 \frac{dx^0}{dt} - \alpha A_i \frac{dx^i}{dt} \right], \quad (\text{II.2.129})$$

so besitzt der Integrand, also die zu  $S$  gehörige Lagrange-Funktion, genau die Gestalt einer „relativistischen Fassung“ der schon aus Gleichung (I.1.87) bekannten Lagrange-Funktion

$$L_{\text{nr}} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - e\Phi(\vec{r}, t) + e\vec{A}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v} \quad (\text{II.2.130})$$

eines geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld. Dabei bezeichnet  $\Phi(\vec{r}, t)$  das aus der Elektrodynamik vertraute „skalare Potential“ und  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  das „Vektorpotential“ dieses Feldes;  $e$  ist die elektrische Ladung des Teilchens. Mit den Entsprechungen

$$\alpha = e \quad (\text{II.2.131})$$

und

$$A^\mu = \left( \frac{1}{c} \Phi, \vec{A} \right) \quad \text{bzw.} \quad A_\mu = \left( \frac{1}{c} \Phi, -\vec{A} \right) \quad (\text{II.2.132})$$

erhält daher die Wirkung (II.2.120), die „rein theoretisch“ eingeführt worden war als die „einzig mögliche Lorentz-invariante Wirkung, in die ein gegebenes Vektorfeld  $A^\mu$  linear eingeht“, eine unmittelbare physikalische Bedeutung! Dabei zeigt sich insbesondere, dass das so genannte „skalare Potential“ *kein* Lorentz-Skalar ist, sondern die nullte Komponente des Vierervektors (II.2.132) und sich damit unter Lorentz-Transformationen gänzlich anders verhält als ein Skalar.

Die Lagrange-Funktion eines relativistischen geladenen Teilchens in einem elektromagnetischen Feld besitzt somit die Form

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\Phi + e\vec{A} \cdot \vec{v}. \quad (\text{II.2.133})$$

Bemerkenswert ist hier, dass im Vergleich zur nichtrelativistischen Formulierung (II.2.130) nur der „mechanische“ Beitrag modifiziert werden musste; der Teil, der die Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld beschreibt, war bereits vorher „relativistisch korrekt“. Aus dieser Lagrange-Funktion (II.2.133) ergibt sich der kanonische Impuls

$$\begin{aligned} \vec{p}_{\text{kan}} &= \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \\ &= \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\vec{A} \\ &= \vec{p} + e\vec{A}, \end{aligned} \quad (\text{II.2.134})$$

wobei hier  $\vec{p}$  (im Unterschied zu  $\vec{p}_{\text{kan}}$ ) die räumliche Komponente des Energie-Impuls-Vektors (II.2.115) bezeichnet. Daraus erhält man dann wie in Gleichung (II.2.112) die Hamilton-Funktion

$$\begin{aligned} H &= \vec{p}_{\text{kan}} \cdot \vec{v} - L \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + e\Phi, \end{aligned} \quad (\text{II.2.135})$$

wobei allerdings noch die Geschwindigkeit des Teilchens durch seinen kanonischen Impuls auszudrücken bleibt. Dazu dient die Umformung

$$\begin{aligned} \frac{(H - e\Phi)^2}{c^2} &= \frac{m^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= m^2 c^2 + \frac{m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &= m^2 c^2 + \left( \vec{p}_{\text{kan}} - e\vec{A} \right)^2, \end{aligned} \quad (\text{II.2.136})$$

in welcher die Gleichung (II.2.134) benutzt wurde, so dass die korrekte Hamilton-Funktion leicht angegeben werden kann:

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \left( \vec{p}_{\text{kan}} - e\vec{A} \right)^2} + e\Phi \quad (\text{II.2.137})$$

mit der nichtrelativistischen Näherung

$$H_{\text{nr}} = mc^2 + \frac{1}{2m} \left( \vec{p}_{\text{kan}} - e\vec{A} \right)^2 + e\Phi . \quad (\text{II.2.138})$$

Es ist nun klar, dass die vorher gefundene Bewegungsgleichung (II.2.128) nach den Ersetzungen (II.2.131) und (II.2.132), also die Gleichung

$$\frac{dp_\mu}{ds} = eF_{\mu\nu}u^\nu , \quad (\text{II.2.139})$$

mit der relativistischen Formulierung des Lorentz-Kraftgesetzes (II.1.11) übereinstimmen muss, so dass insbesondere der Tensor  $F_{\mu\nu}$  die elektrischen und magnetischen Feldstärken beinhalten muss. Bevor dieser Zusammenhang genauer untersucht wird, soll die Lorentz-Kraft noch einmal auf altvertraute Weise hergeleitet werden: Ausgehend von der relativistischen Lagrange-Funktion

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - e\Phi + e\vec{A} \cdot \vec{v}$$

hat man die Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} , \quad (\text{II.2.140})$$

wobei

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -e\vec{\nabla}\Phi + e\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{v}) . \quad (\text{II.2.141})$$

Mit dem schon aus Gleichung (II.1.39) bekannten Ausdruck für den Gradienten eines Skalarproduktes, nämlich

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) ,$$

erhält man weiter

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) , \quad (\text{II.2.142})$$

so dass einerseits

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = -e\vec{\nabla}\Phi + e \left[ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \right] . \quad (\text{II.2.143})$$

Gemäß der Gleichung (II.2.134) gilt andererseits

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} &= \frac{d}{dt} \vec{p}_{\text{kan}} \\ &= \dot{\vec{p}} + e \frac{d}{dt} \vec{A} . \end{aligned} \quad (\text{II.2.144})$$

Da hier das Vektorpotential an dem Weltpunkt auszuwerten ist, an dem sich das Teilchen befindet, hat man

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{A} &= \frac{\partial\vec{A}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial t} \\ &= \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}.\end{aligned}\quad (\text{II.2.145})$$

Damit wird die Lagrange-Gleichung (II.2.140) zu der Beziehung

$$\dot{\vec{p}} = -e\vec{\nabla}\Phi - e\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + e\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}).\quad (\text{II.2.146})$$

Mit den üblichen Identitäten

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$$

und

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

für die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$  und die magnetische Feldstärke  $\vec{B}$  wird daraus

$$\dot{\vec{p}} = e\vec{E} + e\vec{v}\times\vec{B},\quad (\text{II.2.147})$$

also der bekannte Ausdruck für die Lorentz-Kraft, wobei nun allerdings auf der linken Seite die Ableitung der räumlichen Komponente des Energie-Impuls-Vektors (II.2.115) auftaucht. Schreibt man dieses Resultat in Komponenten aus und betrachtet das System

$$\begin{aligned}\dot{p}_x &= eE_x + e(v_y B_z - v_z B_y) \\ \dot{p}_y &= eE_y + e(v_z B_x - v_x B_z) \\ \dot{p}_z &= eE_z + e(v_x B_y - v_y B_x),\end{aligned}\quad (\text{II.2.148})$$

so wird der Vergleich mit dem kovariant formulierten Kraftgesetz (II.2.139) besonders übersichtlich, wenn dort noch die Ableitung nach dem Vierer-Abstand  $s$  in eine Ableitung nach der Zeit  $t$  umgerechnet wird: Aus

$$\begin{aligned}\frac{dp_\mu}{dt} &= \frac{dp_\mu}{ds}\frac{ds}{dt} \\ &= eF_{\mu\nu}u^\nu\frac{ds}{dt} \\ &= eF_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{dt}\end{aligned}\quad (\text{II.2.149})$$

erhält man für die *räumlichen* Komponenten das System

$$\begin{aligned}-\dot{p}_x &= eF_{10}c + e(F_{12}v_y + F_{13}v_z) \\ -\dot{p}_y &= eF_{20}c + e(F_{21}v_x + F_{23}v_z) \\ -\dot{p}_z &= eF_{30}c + e(F_{31}v_x + F_{32}v_y).\end{aligned}\quad (\text{II.2.150})$$

Durch Vergleich dieser beiden Darstellungen (II.2.148) und (II.2.150) lassen sich nun unter Berücksichtigung der Antisymmetrie alle Komponenten des kovarianten Tensors  $F_{\mu\nu}$  ablesen:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.2.151})$$

Damit hat man auch den „gemischten“ Tensor

$$F^{\mu}_{\nu} = g^{\mu\rho} F_{\rho\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.2.152})$$

sowie seine kontravariante Entsprechung

$$F^{\mu\nu} = F^{\mu}_{\rho} g^{\rho\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.2.153})$$

Der in Gleichung (II.2.127) zunächst nur als bequeme Abkürzung eingeführte antisymmetrische Tensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu} \quad (\text{II.2.154})$$

besitzt also eine große unmittelbare Bedeutung: Er fasst die Komponenten des elektrischen und des magnetischen Feldes in relativistisch kovarianter Weise zusammen und wird daher als *Feldstärketensor* bezeichnet. Aus dieser Einsicht ergibt sich eine überaus wichtige Folgerung: Elektrische und magnetische Felder transformieren sich bei einem Wechsel des Bezugssystems *nicht* wie Vektoren, sondern wie die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe!

Natürlich kann man zur Berechnung der Komponenten dieses Feldstärketensors auch direkt von seiner Definition (II.2.127) ausgehen: Sie ist z.B.

$$\begin{aligned} F_{01} &= \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 \\ &= \frac{\partial}{\partial(ct)}(-A_x) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{c} \Phi \\ &= \frac{1}{c} \left[ -\vec{\nabla} \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right]_x \\ &= E_x/c \end{aligned} \quad (\text{II.2.155})$$

oder

$$\begin{aligned}
 F_{21} &= \partial_2 A_1 - \partial_1 A_2 \\
 &= \frac{\partial}{\partial y}(-A_x) - \frac{\partial}{\partial x}(-A_y) \\
 &= \left[ \vec{\nabla} \times \vec{A} \right]_z \\
 &= B_z,
 \end{aligned} \tag{II.2.156}$$

u.s.w. Zu klären bleibt nun noch die Bedeutung der *zeitlichen* Komponente der Bewegungsgleichung (II.2.149): Diese lautet

$$\begin{aligned}
 \frac{dp_0}{dt} &= eF_{0\nu} \frac{dx^\nu}{dt} \\
 &= \frac{e}{c} \vec{E} \cdot \vec{v},
 \end{aligned} \tag{II.2.157}$$

wobei  $p_0 = E/c$  die zeitliche Komponente des Energie-Impuls-Vektors (II.2.115) bezeichnet.<sup>8</sup> Somit hat man einerseits die Beziehung

$$\frac{dE}{dt} = e\vec{E} \cdot \vec{v}. \tag{II.2.158}$$

Aus den räumlichen Komponenten der Bewegungsgleichung, also aus dem Lorentz-Kraftgesetz

$$\dot{\vec{p}} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}$$

erhält man andererseits sofort

$$\dot{\vec{p}} \cdot \vec{v} = e\vec{E} \cdot \vec{v}. \tag{II.2.159}$$

Aus dem Ausdruck (II.2.113) für die Energie eines relativistischen Teilchens ergibt sich nun der Zusammenhang

$$\begin{aligned}
 \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\
 &= \frac{m\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}};
 \end{aligned} \tag{II.2.160}$$

aus dem Ausdruck (II.2.109) für seinen Impuls folgt

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m\dot{\vec{v}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m\vec{v}(\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}})}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}. \tag{II.2.161}$$

---

<sup>8</sup>Hier ist die Notation etwas unglücklich: Die Energie  $E$  darf natürlich nicht mit dem Betrag  $|\vec{E}|$  der elektrischen Feldstärke verwechselt werden.



Daher gilt, wie erwartet,

$$\begin{aligned}
 \dot{\vec{p}} \cdot \vec{v} &= \frac{m\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{mv^2(\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}})}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \\
 &= \frac{m\vec{v} \cdot \dot{\vec{v}}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \\
 &= \frac{dE}{dt}, \tag{II.2.162}
 \end{aligned}$$

so dass die damit übereinstimmende zeitliche Komponente (II.2.158) der Bewegungsgleichung (II.2.149) *keine* neue Information liefert.

Bekanntlich sind das „skalare Potential“  $\Phi(\vec{r}, t)$  und das „Vektorpotential“  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  eines elektromagnetischen Feldes nicht eindeutig: Für eine beliebige (differenzierbare) *Eichfunktion*  $\chi(\vec{r}, t)$  führen die damit „umgeechten“ Potentiale

$$\begin{aligned}
 \vec{A}'(\vec{r}, t) &= \vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r}, t) \\
 \Phi'(\vec{r}, t) &= \Phi(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t}\chi(\vec{r}, t) \tag{II.2.163}
 \end{aligned}$$

auf die gleichen Felder  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \partial\vec{A}/\partial t$  und  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . Diese Tatsache wird nun in der „relativistisch-kovarianten“ Formulierung besonders transparent: Die beiden Beziehungen (II.2.163) werden zusammengefasst durch

$$A'^{\mu} = A^{\mu} - \partial^{\mu}\chi \quad \text{bzw.} \quad A'_{\mu} = A_{\mu} - \partial_{\mu}\chi. \tag{II.2.164}$$

Der Feldstärketensor bleibt jedoch bei einer solchen Umeichung unverändert, denn es gilt

$$\begin{aligned}
 F'_{\mu\nu} &= \partial_{\mu}A'_{\nu} - \partial_{\nu}A'_{\mu} \\
 &= \partial_{\mu}(A_{\nu} - \partial_{\nu}\chi) - \partial_{\nu}(A_{\mu} - \partial_{\mu}\chi) \\
 &= \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}\chi + \partial_{\nu}\partial_{\mu}\chi \\
 &= F_{\mu\nu}; \tag{II.2.165}
 \end{aligned}$$

die *Eichinvarianz* des elektromagnetischen Feldes wird also wesentlich durch die Antisymmetrie des Feldstärketensors bedingt. Auch auf der Ebene des Wirkungsfunktionalis ist sie leicht erkennbar: Hier hat man

$$\begin{aligned}
 S'_{WW} &= -e \int_{P_1}^{P_2} A'_{\mu} dx^{\mu} \\
 &= -e \int_{P_1}^{P_2} (A_{\mu} - \partial_{\mu}\chi) dx^{\mu} \\
 &= S_{WW} + e\chi \Big|_{P_1}^{P_2}, \tag{II.2.166}
 \end{aligned}$$

und der zu  $S_{WW}$  durch die Umeichung hinzukommende konstante zweite Term hat keinen Einfluss auf die stationären „Punkte“.

Eine erste wichtige Anwendung der kovarianten Formulierung besteht darin, dass sie das Verhalten der Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  bei einem Wechsel des Bezugssystems, also unter Lorentz-Transformationen erkennen lässt: Da die Komponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe bilden, besitzen sie auch das Transformationsverhalten eines solchen Tensors. Nach Gleichung (II.2.83) gilt daher

$$F_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}^{\rho} \Lambda_{\nu}^{\sigma} F'_{\rho\sigma} \quad (\text{II.2.167})$$

mit der jeweiligen Lorentz-Transformationsmatrix  $\Lambda_{\mu}^{\rho}$ ; diese Beziehung kann leicht für konkrete Situationen ausgewertet werden. (*Übungsaufgabe!*) Weiterhin lässt sich sofort erkennen, dass die beiden Größen

$$\begin{aligned} I_1 &= F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= 2 \left( \vec{B}^2 - \vec{E}^2/c^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{II.2.168})$$

und

$$\begin{aligned} I_2 &= \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \\ &= -\frac{8}{c} \vec{E} \cdot \vec{B} \end{aligned} \quad (\text{II.2.169})$$

Lorentz-Skalare sind, also *Invarianten*, die in allen Inertialsystemen den gleichen Wert besitzen. (*Übungsaufgabe!*) Daraus lassen sich die folgenden Schlüsse ziehen:

- (i) Stehen  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  in *einem* Inertialsystem senkrecht aufeinander, so in allen.
- (ii) Gilt  $|\vec{B}| = |\vec{E}|/c$  (bzw.  $|\vec{B}| > |\vec{E}|/c$  oder  $|\vec{B}| < |\vec{E}|/c$ ) in *einem* Inertialsystem, so in allen.
- (iii) Gilt  $\vec{B} \cdot \vec{E} > 0$  (bzw.  $\vec{B} \cdot \vec{E} < 0$ ) in *einem* Inertialsystem, so in allen.
- (iv) Ist  $\vec{B} \cdot \vec{E} = 0$ , so gibt es ein Inertialsystem, in dem entweder  $\vec{E} = \vec{0}$  oder  $\vec{B} = \vec{0}$ , je nach dem Vorzeichen von  $I_1$ .

### II.2.5 Kovariante Form der Maxwell-Gleichungen

Die Überlegungen des vorherigen Abschnitts zeigen, dass die Elektrodynamik als eine „Feldtheorie für einen Vierervektor“ aufgefasst werden kann, nämlich für das Vierer-Potential  $A^{\mu}$ , das sich gemäß der Definition (II.2.132) aus dem üblichen skalaren Potential  $\Phi$  und dem Vektorpotential  $\vec{A}$  zusammensetzt. Allerdings muss für dieses Vierer-Potential stets eine bestimmte Eichung vorausgesetzt werden, die zwar gemäß der Gleichung (II.2.165) den Feldstärketensor  $F_{\mu\nu}$  nicht beeinflusst, die aber dazu führt, dass nur *drei* der vier Komponenten des Potentials  $A^{\mu}$  voneinander unabhängig sind.<sup>9</sup> Da andererseits der antisymmetrische Feldstärketensor *sechs* echt voneinander verschiedene Komponenten besitzt, nämlich die drei Komponenten des elektrischen Feldes  $\vec{E}$  und die des

<sup>9</sup>Das wird besonders deutlich, wenn man die Eichung derart wählt, dass das skalare Potential identisch verschwindet.

magnetischen Feldes  $\vec{B}$ , *müssen* zwischen diesen Komponenten bestimmte Abhängigkeiten bestehen. Diese lassen sich leicht aufzeigen: Aus der Definition (II.2.127) des Feldstärketensors erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned}\partial_\rho F_{\mu\nu} &= \partial_\rho(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \partial_\mu \partial_\rho A_\nu - \partial_\nu \partial_\rho A_\mu \\ \partial_\nu F_{\rho\mu} &= \partial_\nu(\partial_\rho A_\mu - \partial_\mu A_\rho) = \partial_\nu \partial_\rho A_\mu - \partial_\mu \partial_\nu A_\rho \\ \partial_\mu F_{\nu\rho} &= \partial_\mu(\partial_\nu A_\rho - \partial_\rho A_\nu) = \partial_\mu \partial_\nu A_\rho - \partial_\mu \partial_\rho A_\nu ;\end{aligned}\tag{II.2.170}$$

daraus ergibt sich

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0 .\tag{II.2.171}$$

Diese Relation (II.2.171) wird als *Bianchi-Identität* bezeichnet. Sie ist „trivial“ in dem Sinne, dass sie bereits aus der antisymmetrischen Form des Feldstärketensors folgt und daher automatisch für *alle* Funktionen  $A_\mu(x^\nu)$  gilt, unabhängig von deren Gestalt. Sie liefert daher eine „Konsistenzbedingung“, welche die Komponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  in jedem Fall erfüllen müssen. Für zwei gleiche Indizes ist diese Identität inhaltsleer: So erhält man etwa für  $\rho = \mu$  nur die Beziehung

$$\begin{aligned}\partial_\mu F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\mu\mu} + \partial_\mu F_{\nu\mu} \\ = \partial_\mu F_{\mu\nu} + 0 - \partial_\mu F_{\mu\nu} \\ = 0 ,\end{aligned}\tag{II.2.172}$$

die wegen der Antisymmetrie des Feldstärketensors ohnehin erfüllt ist. Für drei verschiedene Indizes beinhaltet jedoch selbst diese „triviale“ Identität (II.2.171) bemerkenswerte Aussagen. So findet man sofort

$$\begin{aligned}\partial_1 F_{23} + \partial_3 F_{12} + \partial_2 F_{31} \\ = \partial_x(-B_x) + \partial_z(-B_z) + \partial_y(-B_y) \\ = -\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \\ = 0 ,\end{aligned}\tag{II.2.173}$$

und damit die Maxwell-Gleichung (II.1.2)! Ebenso einfach ergibt sich

$$\begin{aligned}\partial_0 F_{23} + \partial_3 F_{02} + \partial_2 F_{30} \\ = \frac{1}{c} \partial_t(-B_x) + \partial_z E_y/c + \partial_y(-E_z/c) \\ = 0 ,\end{aligned}\tag{II.2.174}$$

also

$$\left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} \right]_x = 0 ;\tag{II.2.175}$$

die verbleibenden Indexkombinationen liefern die weiteren Komponenten der Maxwell-Gleichung (II.1.3). Damit ist bereits der „konzeptionelle Hintergrund“ von zwei der vier Maxwell-Gleichungen verstanden:

Die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen, nämlich

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

und

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B},$$

bilden lediglich eine andere Form der Bianchi-Identität (II.2.171), die ihrerseits als Konsistenzbedingung aus der Definition (II.2.127) des Feldstärketensors folgt, also aus dem Zusammenhang der Komponenten des elektrischen und des magnetischen Feldes mit den Komponenten des Vierer-Potentials.<sup>10</sup>

Damit stellt sich nun die Frage, ob sich auch die beiden anderen Maxwell-Gleichungen, also die *inhomogenen* Gleichungen (II.1.1) und (II.1.4), auf eine ähnlich natürliche Weise aus „übergeordneten Prinzipien“ erschließen lassen. Da offenbar noch eine „Bewegungsgleichung“ für das Vierer-Potential  $A_\mu$  benötigt wird, liegt es nahe, nach einem *Wirkungsfunktional des Feldes* zu suchen, dessen Stationarität unter Variation nach  $A_\mu$  die gesuchten Gleichungen liefern sollte. Zur Durchführung dieses Programms muss der aus dem vorherigen Abschnitt bekannte Ausdruck

$$\begin{aligned} S &= S_{\text{Teilchen}} + S_{WW} \\ &= -mc \int_{P_1}^{P_2} ds - e \int_{P_1}^{P_2} dx^\mu A_\mu \end{aligned} \quad (\text{II.2.176})$$

erweitert werden: Dieser Ansatz ging davon aus, dass das Potential  $A_\mu$  bereits bekannt ist, also von außen vorgegeben wird; die Variation der Weltline des Teilchens liefert dann diejenige Bahn, die vom Teilchen in Gegenwart dieses vorgegebenen Feldes durchlaufen wird. Nun wird jedoch die Antwort auf die Frage gesucht, wie sich die Felder selbst in Gegenwart der von den Teilchen getragenen Ladungen entwickeln. Es fehlt also noch eine „Feldwirkung“  $S_{\text{Feld}}[A_\mu]$ , deren Stationarität unter Variation nach  $A_\mu$  bereits die Dynamik „freier“ elektromagnetischer Felder in Abwesenheit von Ladungen und Strömen bestimmen muss. Die damit ergänzte Wirkung

$$S = S_{\text{Teilchen}} + S_{WW} + S_{\text{Feld}} \quad (\text{II.2.177})$$

muss dann die *gesamte Elektrodynamik* beschreiben, das heißt, die Bewegung geladener Teilchen unter dem Einfluss elektromagnetischer Felder, die ihrerseits durch diese Ladungsbewegung erzeugt und beeinflusst werden.

Wie könnte die gesuchte Feldwirkung aussehen? Klar ist: Sie muss Lorentz-invariant sein, um das Einsteinsche Relativitätsprinzip respektieren zu können. Da weiterhin die freien Maxwell-Gleichungen, die durch Variation von  $S_{\text{Feld}}$  festgelegt werden sollen, *linear* in den Feldern sind, darf  $S_{\text{Feld}}$  nur *quadratisch* von den Feldern abhängen. Das legt nahe,

<sup>10</sup>In diesem Sinne ist das Faradaysche Induktionsgesetz, das für die Entwicklung unserer modernen Gesellschaft eine überragend wichtige Rolle gespielt hat und weiterhin spielt, tatsächlich „trivial“!

$S_{\text{Feld}}$  aus den beiden quadratischen Invarianten (II.2.168) und (II.2.169) aufzubauen: Ein vernünftiger erster Ansatz lautet daher

$$S_{\text{Feld}} = \alpha \int d\Omega F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \beta \int d\Omega \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} , \quad (\text{II.2.178})$$

wobei  $d\Omega = c dt d^3r$  ein „Volumen-“Element des vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums bezeichnet und die Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  noch geeignet festzulegen sind. Die folgende Umformung wird jedoch zeigen, dass der zweite Summand dieses Ansatzes *nicht* benötigt wird: Es gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} &= F_{\mu\nu} (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho A_\sigma - \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\sigma A_\rho) \\ &= F_{\mu\nu} (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho A_\sigma - \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \partial_\rho A_\sigma) \\ &= 2F_{\mu\nu} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho A_\sigma \\ &= 2(\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu - \varepsilon^{\nu\mu\rho\sigma} \partial_\mu A_\nu) \partial_\rho A_\sigma \\ &= 4\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu A_\nu) (\partial_\rho A_\sigma) \\ &= 4\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu (A_\nu \partial_\rho A_\sigma) - 4\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\mu \partial_\rho A_\sigma \\ &= \partial_\mu (4\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma) , \end{aligned} \quad (\text{II.2.179})$$

wobei mehrfach die totale Antisymmetrie von  $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  ausgenutzt wurde. Damit besitzt die Invariante  $I_2 = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}$  die Form einer „Vierer-Divergenz“, so dass das Integral über  $I_2$  mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes in ein (dreidimensionales) Oberflächenintegral überführt werden kann:

$$\begin{aligned} \int d\Omega I_2 &= \int d\Omega \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \\ &= \int d\Omega \partial_\mu (4\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma) \\ &= \int dS_\mu 4\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma . \end{aligned} \quad (\text{II.2.180})$$

Fordert man also, dass die Felder bei der Variation auf dem Rand  $\partial\Omega$  des betrachteten Minkowski-Volumens festgehalten werden, reduziert sich dieses Integral auf eine Konstante und ist damit für das Variationsproblem ohne Bedeutung.

Damit bleibt nur noch der sehr symmetrische Ausdruck

$$\begin{aligned} S_{\text{Feld}} &= \alpha \int d\Omega F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \alpha \int c dt \int d^3r 2 \left( \vec{B}^2 - \frac{\vec{E}^2}{c^2} \right) . \end{aligned} \quad (\text{II.2.181})$$

Die Konstante  $\alpha$  ist nun vom benutzten Maßsystem abhängig; sie legt die Einheiten der Feldstärken fest. Im MKSA- (bzw. SI-)System gilt

$$\alpha = -\frac{1}{4\mu_0 c} = -\frac{\varepsilon_0 c}{4} , \quad (\text{II.2.182})$$

so dass die Feldwirkung nun eine sehr vertraute Form annimmt:

$$S_{\text{Feld}} = \int dt \int d^3r \left( \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right). \quad (\text{II.2.183})$$

Dieser Ausdruck führt sofort zu einer weiteren wichtigen Erkenntnis:

*Die Lagrange-Funktion eines freien elektromagnetischen Feldes gleicht der Differenz seiner elektrischen und seiner magnetischen Energie,*

$$L = \int d^3r \left( \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 \right),$$

so dass seine Lagrange-Dichte gegeben wird durch

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2,$$

also durch die Lorentz-invariante Differenz der elektrischen und der magnetischen Energiedichte.

In typischen Situationen wird man es nun mit *mehreren* (Punkt-)Ladungen  $q_i$  zu tun haben ( $i = 1, \dots, N$ ). Ziel der folgenden Überlegungen ist, den Wechselwirkungsterm  $S_{\text{WW}}$  des vollen Funktionals (II.2.177) in eine für diesen Fall besser geeignete Form zu bringen. Wenn sich die Ladungen auf Bahnen  $\vec{r}_i(t)$  bewegen, wird die Ladungsdichte durch

$$\varrho(\vec{r}, t) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \quad (\text{II.2.184})$$

gegeben; entsprechend ist

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3r \varrho(\vec{r}, t) \\ &= \int d^3r \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^N q_i \end{aligned} \quad (\text{II.2.185})$$

die Gesamtladung. Schreibt man nun

$$dQ = \varrho(\vec{r}, t) d^3r, \quad (\text{II.2.186})$$

so ist die linke Seite — und damit auch die rechte — ein Lorentz-Skalar, da Ladungen durch Lorentz-Transformationen nicht beeinflusst werden. Weiterhin hat man

$$\begin{aligned}
dQ dx^\mu &= \varrho(\vec{r}, t) dx^\mu d^3r \\
&= \varrho(\vec{r}, t) \frac{dx^\mu}{dt} dt d^3r \\
&= \frac{1}{c} \varrho(\vec{r}, t) \frac{dx^\mu}{dt} d\Omega .
\end{aligned} \tag{II.2.187}$$

Da nun  $dQ dx^\mu$  ein Vierervektor ist und  $d\Omega$  ein Lorentz-Skalar, muss auch

$$j^\mu = \varrho(\vec{r}, t) \frac{dx^\mu}{dt} \tag{II.2.188}$$

eine Vierervektor sein; dieser Vektor wird als *Vierer-Strom* bezeichnet. Seine *räumlichen* Komponenten lauten

$$\begin{aligned}
\vec{j} &= \varrho(\vec{r}, t) \frac{d\vec{r}}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \frac{d\vec{r}_i}{dt} ;
\end{aligned} \tag{II.2.189}$$

das ist genau der übliche Stromdichtevektor, der in die Maxwell-Gleichung (II.1.4) eingeht. Die *zeitliche* Komponente des Vierer-Stroms ist

$$j^0 = c\varrho(\vec{r}, t) , \tag{II.2.190}$$

so dass

$$j^\mu = (c\varrho, \vec{j}) \quad \text{bzw.} \quad j_\mu = (c\varrho, -\vec{j}) . \tag{II.2.191}$$

Mit Hilfe dieses Vierer-Stroms kann jetzt der Wechselwirkungsterm  $S_{\text{WW}}$  des Wirkungsfunktionals in eine häufig verwendete, ebenfalls „manifest Lorentz-invariante“ Gestalt gebracht werden: Ausgehend von der in Gleichung (II.2.176) benutzten Form findet man

$$\begin{aligned}
S_{\text{WW}} &= - \sum_{i=1}^N q_i \int dx_i^\mu A_\mu(\vec{r}_i(t), t) \\
&= - \sum_{i=1}^N q_i \int dt \frac{dx_i^\mu(t)}{dt} A_\mu(\vec{r}_i(t), t) \\
&= - \sum_{i=1}^N q_i \int dt \int d^3r \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t)) \frac{dx_i^\mu(t)}{dt} A_\mu(\vec{r}, t) \\
&= - \frac{1}{c} \int d\Omega j^\mu A_\mu ,
\end{aligned} \tag{II.2.192}$$

hat somit eine lineare Kopplung zwischen Vierer-Strom und Vierer-Potential.

Die volle Wirkung eines Systems geladener Teilchen in einem elektromagnetischen Feld, das von diesen bewegten Ladungen selbst erzeugt wird, lautet daher

$$\begin{aligned} S &= S_{\text{Teilchen}} + S_{\text{WW}} + S_{\text{Feld}} \\ &= -\sum_{i=1}^N m_i c \int ds_i - \frac{1}{c} \int d\Omega j^\mu A_\mu - \frac{1}{4\mu_0 c} \int d\Omega F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (\text{II.2.193})$$

Damit ist  $S$  ein Funktional der Weltlinien der  $N$  Teilchen *und* des Vierer-Potentials  $A_\mu$ . Im Unterschied zum Vorgehen in Abschnitt II.2.4 wird nun die Bewegung der geladenen Teilchen vorgegeben, d.h. dem Feld wird die Bewegung der Teilchen aufgeprägt. Statt der festen Weltlinien der Teilchen werden dann die elektromagnetischen Felder variiert, also die Komponenten des Vierer-Potentials: Das liefert zunächst den Ausdruck

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int d\Omega j^\mu \delta A_\mu - \frac{1}{4\mu_0 c} \int d\Omega (\delta F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}) ; \quad (\text{II.2.194})$$

mit Hilfe der einfachen Umformung

$$\begin{aligned} \delta F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= \delta F^{\mu\nu} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} F^{\rho\sigma} \\ &= \delta F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \\ &= F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{II.2.195})$$

ergibt sich daraus

$$\delta S = -\frac{1}{c} \int d\Omega j^\mu \delta A_\mu - \frac{1}{2\mu_0 c} \int d\Omega F^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) . \quad (\text{II.2.196})$$

Der im zweiten Term auf der rechten Seite auftretende Integrand lässt sich aufgrund der Antisymmetrie des Feldstärketensors weiter vereinfachen: Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} &F^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) \\ &= F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu - F^{\nu\mu} \partial_\mu \delta A_\nu \\ &= 2F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu , \end{aligned} \quad (\text{II.2.197})$$

so dass

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{c} \int d\Omega j^\mu \delta A_\mu - \frac{1}{\mu_0 c} \int d\Omega F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu \\ &= -\frac{1}{c} \int d\Omega j^\mu \delta A_\mu - \frac{1}{\mu_0 c} \int d\Omega \partial_\mu (F^{\mu\nu} \delta A_\nu) \\ &\quad + \frac{1}{\mu_0 c} \int d\Omega (\partial_\mu F^{\mu\nu}) \delta A_\nu . \end{aligned} \quad (\text{II.2.198})$$

Der zweite Term dieses Zwischenergebnisses lässt sich nach dem aus Gleichung (II.2.180) bekannten Muster mit dem Gauß'schen Integralsatz in ein Oberflächenintegral umwandeln, trägt also nicht bei. Damit ergibt sich schließlich der kompakte Ausdruck

$$\delta S = \frac{1}{\mu_0 c} \int d\Omega (\partial_\mu F^{\mu\nu} - \mu_0 j^\nu) \delta A_\nu , \quad (\text{II.2.199})$$



und die Forderung  $\delta S = 0$  liefert endlich die gesuchte Gleichung, welche die Dynamik des elektromagnetischen Feldes bestimmt, nämlich

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu . \quad (\text{II.2.200})$$

Mit der expliziten Gestalt (II.2.153) des kontravarianten Feldstärketensors sowie der Darstellung (II.2.191) des Vierer-Stroms übersetzt sich diese Beziehung für  $\nu = 0$  sofort in die Gleichung

$$\frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \mu_0 c \varrho , \quad (\text{II.2.201})$$

also in die Maxwell-Gleichung (II.1.1):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \mu_0 c^2 \varrho = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho . \quad (\text{II.2.202})$$

Für  $\nu = 1$  liefert die Bewegungsgleichung (II.2.200) dagegen

$$\frac{\partial}{\partial(ct)} \frac{(-E_x)}{c} + \frac{\partial}{\partial y} B_z - \frac{\partial}{\partial z} B_y = \mu_0 j_x \quad (\text{II.2.203})$$

oder

$$\left[ \vec{\nabla} \times \vec{B} \right]_x = \left[ \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right]_x ; \quad (\text{II.2.204})$$

für  $\nu = 2, 3$  ergeben sich die weiteren Komponenten der Maxwell-Gleichung (II.1.4). Damit ist das Ziel erreicht: Die *inhomogenen* Maxwell-Gleichungen wurden identifiziert als Bewegungsgleichungen des elektromagnetischen Feldes, die durch die Stationariät des „eigentlich sehr einfachen“, Lorentz-invarianten Wirkungsfunktional (II.2.193) festgelegt werden.

Die *homogenen* Maxwell-Gleichungen, die durch die Bianchi-Identität (II.2.171) zusammengefasst werden, lassen sich unter Verwendung des *dualen Feldstärketensors*

$$F^{*\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \quad (\text{II.2.205})$$

auch in bequemerer Form schreiben, nämlich (*Übungsaufgabe!*)

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} = 0 . \quad (\text{II.2.206})$$

Damit lassen sich die zentralen Resultate dieses und des vorherigen Abschnittes nun wie folgt zusammenfassen:

*Die Dynamik eines Systems wechselwirkender Ladungen und elektromagnetischer Felder ergibt sich aus der Lorentz-invarianten Wirkung*

$$S = - \sum_{i=1}^N m_i c \int ds_i - \frac{1}{c} \int d\Omega j^\mu A_\mu - \frac{1}{4\mu_0 c} \int d\Omega F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} .$$

Dabei bezeichnet

$$\begin{aligned} j^\mu &= (c\rho, \vec{j}) && \text{den Vierer-Strom,} \\ A^\mu &= (\Phi/c, \vec{A}) && \text{das Vierer-Potential,} \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu && \text{den Feldstärketensor.} \end{aligned}$$

Der „duale“ Feldstärketensor  $F^{*\mu\nu}$  gehorcht der Bianchi-Identität

$$\partial_\mu F^{*\mu\nu} = 0,$$

die den homogenen Maxwell-Gleichungen entspricht. Aus der Stationarität des Wirkungsfunktional unter Variationen nach den Weltlinien der geladenen Teilchen erhält man ihre Bewegungsgleichungen

$$\frac{dp_i^\mu}{ds} = q_i F^{\mu\nu} u_{i\nu}$$

mit den Vierer-Impulsen  $p_i^\mu$  bzw. den Vierer-Geschwindigkeiten  $u_{i\nu}$  der Teilchen; das ist das relativistisch formulierte Lorentz-Kraftgesetz. Aus der Stationarität unter Variationen nach dem Vierer-Potential erhält man andererseits die Bewegungsgleichungen der Felder in der Form

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu;$$

diese Euler-Lagrange-Gleichung fasst die inhomogenen Maxwell-Gleichungen zusammen.

Die Tatsache, dass die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{*\mu\nu} &= 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \mu_0 j^\nu \end{aligned} \tag{II.2.207}$$

aus einer Lorentz-invarianten Wirkung folgen, impliziert sofort, dass diese Gleichungen „relativistisch korrekt“ sind: Anders als die Newtonsche Mechanik respektiert die Maxwellsche Elektrodynamik von vornherein das Einsteinsche Relativitätsprinzip; es müssen daher *keine* nachträglichen Korrekturen an der Elektrodynamik angebracht werden.

Die anfangs vielleicht „abstrakt“ erscheinende kovariante Formulierung (II.2.207) der Maxwell-Gleichungen besitzt den großen Vorteil, dass einige wichtige Zusammenhänge besonders einfach sichtbar werden. So hat man etwa sofort

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 \partial_\nu j^\nu = 0 \tag{II.2.208}$$

aufgrund der Antisymmetrie von  $F^{\mu\nu}$ , also auch

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{II.2.209}$$

Komponentenweise ausgeschrieben ergibt das

$$\frac{\partial}{\partial(ct)}c\rho + \frac{\partial}{\partial x}j_x + \frac{\partial}{\partial y}j_y + \frac{\partial}{\partial z}j_z = 0. \quad (\text{II.2.210})$$

Das ist die bekannte Kontinuitätsgleichung (II.1.13) für die lokale Ladungserhaltung, die somit in der kovarianten Formulierung deutlich einfacher zu erkennen ist als in der altvertrauten, traditionellen Form der Maxwell-Gleichungen. Es lässt sich dann weiterhin leicht sehen, dass die Gültigkeit dieser Kontinuitätsgleichung — und damit die lokale Ladungserhaltung — sehr eng mit der *Eichinvarianz* der Elektrodynamik verbunden ist: Die Bestandteile  $S_{\text{Teilchen}}$  und  $S_{\text{Feld}}$  der Gesamtwirkung  $S$  sind bereits invariant unter einer „Umeichung“

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi \quad (\text{II.2.211})$$

mit einer beliebigen Eichfunktion  $\chi$ ; es ändert sich bei einer solchen Ersetzung (II.2.211) also nur der Teil  $S_{\text{WW}}$ , der die *Wechselwirkung* von Teilchen und Feldern beschreibt:

$$\begin{aligned} S'_{\text{WW}} - S_{\text{WW}} &= -\frac{1}{c} \int d\Omega j^\mu (A'_\mu - A_\mu) \\ &= \frac{1}{c} \int d\Omega j^\mu \partial_\mu\chi \\ &= \frac{1}{c} \int d\Omega \left[ \partial_\mu(j^\mu\chi) - \chi\partial_\mu j^\mu \right] \\ &= \frac{1}{c} \int dS_\mu j^\mu\chi - \frac{1}{c} \int d\Omega \chi\partial_\mu j^\mu. \end{aligned} \quad (\text{II.2.212})$$

Dehnt man nun das betrachtete Volumen  $\Omega$  bis ins Unendliche aus, so verschwindet der erste Term, weil dann auf der Oberfläche keine Ladungen mehr vorhanden sind. Andererseits verlangt die Forderung nach Eichinvarianz nun

$$S'_{\text{WW}} - S_{\text{WW}} = 0 \quad (\text{II.2.213})$$

und damit

$$0 = \int d\Omega \chi\partial_\mu j^\mu \quad (\text{II.2.214})$$

für alle Eichfunktionen  $\chi$ , so dass

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

Damit ist die Kontinuitätsgleichung eine Konsequenz der Eichinvarianz! Hier deutet sich einmal mehr der Zusammenhang zwischen Invarianzen und Erhaltungsgrößen an, der in der Mechanik durch das *Noether-Theorem* beschrieben wurde, der jedoch weit über die Mechanik hinaus Gültigkeit besitzt: So kann, wie gerade festgestellt, innerhalb der Elektrodynamik die lokale Ladungserhaltung als notwendige Folge der Eichinvarianz verstanden werden.