Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 20. Januar 2014

Übungen zur Vorlesung *Thermodynamik und Statistik*

(WiSe 2013/14, Übungsblatt 13)

`http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingSP/SP.html`

Abgabe: Montag, 27. Januar bis 17:00 Uhr

45) **Elektronen und Löcher in einem intrinsischen Halbleiter**

Betrachten Sie einen intrinsischen Halbleiter, der nur ein Valenz- und ein Leitungsband besitzen soll; die Energielücke besitze die Größe E_G. Bei der Temperatur $T = 0$ ist das Valenzband mit N Elektronen besetzt; das Leitungsband dagegen leer. Legt man das Nullniveau der Energie auf die Oberkante des Valenzbandes, wird die Energie der Elektronen durch

$$\varepsilon_i = E_G + \frac{p^2}{2m_e}$$

approximiert, die der Löcher durch

$$\varepsilon_j = -\frac{p^2}{2m_h} \; .$$

a) Wie lauten die Dichte N_e/V der Elektronen im Leitungsband und die Dichte N_h/V der Löcher im Valenzband bei beliebigen Temperaturen T?

b) Zeigen Sie, dass für $E_G \gg k_\mathrm{B}T$ das chemische Potential des Elektronensystems der Beziehung

$$\mu = \frac{1}{2}E_G + \frac{3}{4}k_\mathrm{B}T\ln\left(\frac{m_h}{m_e}\right)$$

gehorcht, und dass weiterhin die Dichten dann durch

$$\frac{N_e}{V} = \frac{N_h}{V} = 2\left(\frac{2\pi(m_e m_h)^{1/2}k_\mathrm{B}T}{h^2}\right)^{3/2}\exp\Big(-E_G/(2k_\mathrm{B}T)\Big)$$

gegeben werden. Welche Dichten erhält man für $E_G = 0.7$ eV bei $T = 300$ K ? **(3P)**

46) **Das relativistische Elektronengas**

a) Die Energie eines relativistischen Elektrons mit dem Impuls p lautet $\varepsilon = c\sqrt{p^2 + (mc)^2}$. Erschließen Sie daraus die folgende Darstellung für den Druck P eines relativistischen idealen Elektronengases:

$$P = \frac{8\pi}{3}\frac{m^4c^5}{h^3}\int_0^\infty \frac{\sinh^4\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta}{\exp[\beta(mc^2\cosh\vartheta - \mu)] + 1} \; .$$

b) Betrachten Sie nun das relativistische Elektronengas im Grenzfall $T \to 0$: Parametrisieren Sie den Fermi-Impuls gemäß

$$p_{\mathrm{F}} = mc \sinh \vartheta_{\mathrm{F}}$$

und zeigen Sie, dass der Nullpunktsdruck die Form

$$P_0 = \frac{\pi}{3} \frac{m^4 c^5}{h^3} \left[\frac{1}{4} \sinh 4\vartheta_{\mathrm{F}} - 2 \sinh 2\vartheta_{\mathrm{F}} + 3\vartheta_{\mathrm{F}} \right]$$

annimmt. Wie lauten die entsprechenden Ausdrücke für N/V und E/V? **(3P)**

47) **Weißer Zwerg oder Schwarzes Loch?**

a) Ein Weißer Zwerg besteht aus 10^{30} kg Helium mit einer Dichte ϱ von 10^4 kg/cm^3 und einer Temperatur T von 10^7 K. Zeigen Sie, dass das Elekronengas im Inneren des Sternes einerseits relativistisch behandelt werden muss, andererseits jedoch fast völlig entartet ist.

b) Damit der Weiße Zwerg mit der Gesamtmasse M einen stabilen Radius R besitzt, muss der Nullpunktsdruck $P_0(R)$ des Elektronengases den Gravitationsdruck kompensieren. Erklären Sie die Gleichgewichtsbedingung

$$P_0(R) = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{GM^2}{R^4} ,$$

wobei G die Gravitationskonstante bezeichnet und α eine Zahl der Ordnung $\mathcal{O}(1)$, durch welche die genaue Massenverteilung im Stern berücksichtigt wird.

c) Zeigen Sie, dass der bereits in Aufgabe 46 eingeführte Fermi-Parameter $\sinh \vartheta_{\mathrm{F}} \equiv x$ in der Form

$$x = \left(\frac{9\pi M}{8 m_p} \right)^{1/3} \frac{\hbar/(mc)}{R}$$

geschrieben werden kann, wobei m_p (im Unterschied zur Elektronenmasse m) die Protonenmasse ist. Zeigen Sie weiterhin unter Benutzung des Resultates aus Aufgabe 46, dass für $x \gg 1$ die Gleichgewichtsbedingung die Form

$$2x^4 - 2x^2 = 6\pi\alpha \left(\frac{\hbar/(mc)}{R} \right)^3 \frac{GM^2/R}{mc^2}$$

erhält.

d) Zeigen Sie, dass der Nullpunktsdruck den Gravitationskollaps nicht mehr aufhalten kann, sobald die Masse des Weißen Zwerges eine kritische Größe überschreitet. Schätzen Sie diesen kritischen Wert ab und vergleichen Sie ihn mit der Masse unserer Sonne! **(4P)**