Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 13. Januar 2014

Übungen zur Vorlesung *Thermodynamik und Statistik*

(WiSe 2013/14, Übungsblatt 12)

`http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingSP/SP.html`

Abgabe: Montag, 20. Januar bis 17:00 Uhr

42) **Aus der aktuellen Forschung: Bose–Einstein-Kondensation von Licht**

Im November 2010 berichtete eine Gruppe Bonner Physiker über die Bose–Einstein-Kondensation von Photonen bei Zimmertemperatur. Um diesen Effekt, der für ein „freies" Photonengas nicht auftreten kann, zu ermöglichen, wurde ein Photonengas in einem bisphärischen Resonator beobachtet. Die Energie eines Photons in einem solchen Resonator besitzt die Darstellung

$$E = \hbar\omega = \hbar c|\vec{k}| = \hbar c\sqrt{k_z^2 + k_r^2}\ .$$

Hier bezeichnet c die Lichtgeschwindigkeit im Resonatormedium (ein Farbstoff) und $\vec{k}$ den Wellenzahlvektor des Photons; k_z ist seine longitudinale Komponente (parallel zur Resonatorachse) und k_r seine Komponente in radialer Richtung. Im Experiment wird $\vec{k}$ durch die Resonatorgeometrie und das benutzte Medium derart festgelegt, dass $k_z \gg k_r$.

Aufgrund der sphärischen Spiegel hängt die longitudinale Wellenzahl $k_z = k_z(r)$ vom Abstand r von der Resonatorachse ab: Bezeichnet $D(r)$ den lokalen Spiegelabstand, so gilt

$$D(r) = \frac{n\pi}{k_z(r)} = D_0 - 2\Big(R - \sqrt{R^2 - r^2}\Big)\ , \tag{1}$$

wobei R den Krümmungsradius der Spiegel angibt und n ganzzahlig ist. (Skizze!)

a) Erklären Sie, warum die Energie des Photons näherungsweise in der Form

$$E = m^*c^2 + \frac{\hbar^2 k_r^2}{2m^*} + \frac{1}{2}m^*\Omega^2 r^2$$

angegeben werden kann, wobei die hier auftauchende effektive Masse durch $m^* = \hbar k_z(0)/c$ bestimmt wird, die Oszillatorfrequenz Ω durch

$$\Omega = \frac{c}{\sqrt{RD_0/2}}\ .$$

Das Photonengas im Resonator verhält sich daher wie ein ideales *zwei*dimensionales, harmonisch gefangenes Bose-Gas!

b) Die experimentellen Parameter lauten $R = 1$ m, $D_0 = 1.46\ \mu$m und $c = 0.73\ c_{\rm Vakuum}$; die in der Gleichung (1) auftauchende Modenzahl ist $n = 7$. Welche numerischen Werte haben dann m^* und Ω ?

c) Zeigen Sie, dass die Kondensationstemperatur T_c durch

$$N = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_\mathrm{B} T_c}{\hbar \Omega} \right)^2$$

festgelegt wird, wenn sich N Photonen im Resonator befinden. Angenommen, diese „massiven“ Photonen befinden sich bei Zimmertemperatur im thermischen Gleichgewicht mit dem Resonatormedium: Wie groß ist dann die kritische Photonenzahl N, oberhalb derer die Kondensation beobachtet werden kann? **(4P)**

Weiteres zu diesem Experiment finden Sie in der Originalveröffentlichung: J. Klaers *et al.*, Nature **468**, 545 (2010).

43) Spezifische Wärmekapazität des harmonisch gefangenen Bose-Gases

In Aufgabe 41) wurden für ein Bose-Gas in einer dreidimensionalen isotropen Oszillatorfalle die beiden Beziehungen

$$\ln \mathcal{Z} = \left(\frac{k_\mathrm{B} T}{\hbar \omega} \right)^3 g_4(z)$$

und

$$N - N_0 = \left(\frac{k_\mathrm{B} T}{\hbar \omega} \right)^3 g_3(z)$$

gewonnen, wobei $z = \exp\left[\beta(\mu - \varepsilon_0)\right]$ die auf die Grundzustandsenergie bezogene Fugazität angibt.

Diskutieren Sie ausgehend von diesen Gleichungen den Verlauf der spezifischen Wärmekapazität des gefangenen Gases in Abhängigkeit von der Temperatur. Wie verhält sich diese Wärmekapazität am Kondensationspunkt, wie bei hohen Temperaturen?

Hinweis: Sie können die in der Vorlesung für das freie Gas besprochenen Argumente (fast) unverändert übernehmen. Benötigte numerische Werte der Riemannschen Zeta-Funktion sind $\zeta(2) = \pi^2/6$, $\zeta(3) = 1.202057\ldots$, $\zeta(4) = \pi^4/90$. **(3P)**

44) Phononen in ^{4}He

Bei sehr tiefen Temperaturen, für $0 < T < 0.6\,\mathrm{K}$, hat die Schallgeschwindigkeit in flüssigem ^{4}He den Wert $c = 238\,\mathrm{m/s}$; die Dichte beträgt $\varrho = 0.1455\,\mathrm{g/cm^3}$.

a) Berechnen Sie die Debye-Temperatur und die Debye-Frequenz dieses Systems.

b) Durch Messungen findet man in diesem Temperaturbereich eine spezifische Wärmekapazität pro Masse von

$$\frac{C_V}{m} = (20.4 \pm 0.4) \left(\frac{T}{\mathrm{K}} \right)^3 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}} \,.$$

Was schließen Sie daraus?

Hinweis: Beachten Sie, dass in Flüssigkeiten nur longitudinale, aber keine transversalen Schallwellen auftreten können. **(3P)**