Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 21. Oktober 2013

Übungen zur Vorlesung *Thermodynamik und Statistik*

(WiSe 2013/14, Übungsblatt 2)

`http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingSP/SP.html`

Abgabe: Montag, 28. Oktober bis 17:00 Uhr

5) **Noch einmal: Welches Phasenraumvolumen besetzt ein Zustand?**

Ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m bewege sich in dem eindimensionalen „Dreieckspotential“

$$V(x) = \begin{cases} ax & , \quad x \geq 0 \\ +\infty & , \quad x < 0 \, , \end{cases}$$

wobei die Konstante a positiv ist.

a) Wie lauten seine exakten Energieeigenwerte E_n? Welche Näherung erhält man für große Quantenzahlen n ?

Hinweise: Die Fundamentallösungen $\mathrm{Ai}(z)$ und $\mathrm{Bi}(z)$ der Airyschen Differentialgleichung $\psi''(z) - z\psi(z) = 0$ verhalten sich für große positive z wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ai}(z) &\sim \frac{1}{2}\pi^{-1/2} z^{-1/4} \exp(-2z^{3/2}/3) \\ \mathrm{Bi}(z) &\sim \pi^{-1/2} z^{-1/4} \exp(+2z^{3/2}/3) \, . \end{aligned}$$

Die Nullstellen z_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) von Ai besitzen die Darstellung $z_n = -f\left(\frac{3\pi}{2}(n - 1/4)\right)$ mit

$$f(z) \sim z^{2/3} \left(1 + \frac{5}{48} z^{-2} - \frac{5}{36} z^{-4} + \frac{77125}{82944} z^{-6} - \ldots \right) \; ;$$

die ersten drei Nullstellen sind (siehe Abramowitz/Stegun; Table 10.13)

$$\begin{aligned} z_1 &= -2.33810\,741 \\ z_2 &= -4.08794\,944 \\ z_3 &= -5.52055\,983 \, . \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie die Energieeigenwerte in semiklassischer Näherung mit Hilfe der Bohr–Sommerfeld-Regel

$$\oint p \, \mathrm{d}q = 2\pi\hbar(n - 1/4) \, .$$

c) Geben Sie für die drei niedrigsten Eigenwerte den relativen Fehler der „Bohr–Sommerfeld-Quantisierung“ an. **(3P)**

6) **Ideales Gas im Schwerefeld als mikrokanonisches Ensemble**

Gegeben sei eine sehr große Zahl N von nichtwechselwirkenden klassischen Teilchen der Masse m, die sich im Schwerefeld der Erde befinden und in einem (nach oben unendlich ausgedehnten) Zylinder mit der Querschnittsfläche A eingesperrt sein sollen. Die Hamiltonfunktion des Systems innerhalb des Zylinders lautet also

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + mgz_i \right) .$$

Berechnen Sie für gegebene Gesamtenergie E das Phasenraumvolumen sowie die mikrokanonische Entropie $\widetilde{S} = \ln \Omega$ des Systems und zeigen Sie, dass diese Größe extensiv ist.

Hinweise: Zerlegen Sie die Gesamtenergie E in einen kinetischen Anteil ε sowie einen potentiellen Anteil $E - \varepsilon$ und berechnen Sie das Phasenraumvolumen zunächst für beliebiges ε. Bestimmen Sie dann dasjenige ε, für welches die Entropie maximal wird, und nehmen Sie an, dass dadurch bereits alle statistisch relevanten Zustände ausgeschöpft werden („Maximumsnäherung"). — Das Volumen des n-dimensionalen „Einheitssimplex" $\{\sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1 \; ; \; x_i \geq 0\}$ ist $1/n!$, wie durch Induktion (Prinzip von Cavalieri!) sofort zu erkennen ist. **(3P)**

7) **Mikrozustände für ein Urnenmodell**

N schwarze und N weiße Kugeln wurden zufällig auf zwei nebeneinanderstehende Glasurnen verteilt. Ein Makrozustand dieses Systems wird charakterisiert durch die Angabe der Zahl k_1 der schwarzen und der Zahl k_2 der weißen Kugeln in der linken Urne, ein Mikrozustand dagegen durch die Angabe, *welche* Kugeln sich in der linken Urne befinden.

a) Wieviele Mikrozustände $\Omega(k_1, k_2)$ gehören zu einem Makrozustand? Wie groß ist die Gesamtzahl Ω_{ges} aller Mikrozustände?

b) Wie groß ist die Entropie $\ln \Omega_{\text{ges}}$ des Systems? — Betrachten Sie die Konfiguration mit der größten Zahl $\Omega_{\max}$ an Realisierungen und berechnen Sie $\ln \Omega_{\max}$ mit Hilfe der üblichen Stirling-Näherung. Was fällt Ihnen auf?

c) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, das System *genau* in dem Makrozustand mit der maximalen Zahl von Mikrozuständen anzutreffen, für große N verschwindet. **(2P)**

8) **Von der Binomial– zur Gaußverteilung**

a) Zeigen Sie für große N und $|\delta| \ll N/2$ die Gültigkeit der Näherung

$$\binom{N}{\frac{N}{2} + \delta} = 2^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\, N/4}} \exp\left(- 2\delta^2/N \right) .$$

b) Betrachten Sie noch einmal das Urnenmodell aus Aufgabe 7. Zeigen Sie, dass es praktisch sicher ist, dass weder k_1 noch k_2 um mehr als einen beliebig kleinen Bruchteil r von ihrem Erwartungswert $N/2$ abweichen, sofern N hinreichend groß ist. **(2P)**