Universität Oldenburg Oldenburg, den 5. Juni 2013
Institut für Physik

Übungen zur Vorlesung *Quantenmechanik*

(SoSe 2013, Übungsblatt 10)

`http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingQM/QM.html`

Abgabe: Dienstag, 11. Juni bis 12:00 Uhr

34) **Bindungszustände für ein "doppeltes δ-Potential"**

Untersuchen Sie die Bindungszustände für das eindimensionale Potential

$$V(x) = -W_0\big(\delta(x+a) + \delta(x-a)\big)$$

in Abhängigkeit vom Abstand $2a$ der beiden δ-Mulden. Zeigen Sie insbesondere, dass für $a \to 0$ nur ein einziger, symmetrischer Bindungszustand existiert und ein zweiter, antisymmetrischer Bindungszustand erst bei einem gewissen endlichen Abstand auftreten kann. Wie groß ist die Tunnelaufspaltung für sehr große a? **(3P)**

35) **Noch einmal: Die Kugelflächenfunktionen**

Die Leiteroperatoren $L_\pm$ und die z-Komponente L_z des Drehimpulsoperators besitzen bekanntlich in Kugelkoordinaten die Darstellungen

$$\begin{aligned} L_\pm &= \hbar e^{\pm i\varphi}\left[(-\cot\vartheta)\,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} \pm \frac{\partial}{\partial\vartheta}\right] \\ L_z &= \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\ . \end{aligned}$$

a) Folgern Sie aus den Gleichungen $L_z Y_{\ell\ell} = \hbar\ell Y_{\ell\ell}$ und $L_+ Y_{\ell\ell} = 0$, dass die Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell\ell}$ die Form

$$Y_{\ell\ell}(\vartheta,\varphi) = N_\ell\, e^{i\ell\varphi}\sin^\ell\vartheta$$

annehmen. Verwenden Sie dann das Eulersche Integral

$$\int_0^1 dt\; t^{z_1-1}(1-t)^{z_2-1} = \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1+z_2)}$$

zur Berechnung der Normierungskonstanten N_ℓ:

$$N_\ell = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)!}{4\pi}}\ ,$$

wobei der Faktor $(-1)^\ell$ Konvention ist.

b) Zeigen Sie nun zunächst die Beziehung

$$Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{(\ell+m)!}{(2\ell)!(\ell-m)!}}\;(L_-/\hbar)^{\ell-m}\,Y_{\ell\ell}(\vartheta,\varphi)\ .$$

Beweisen Sie dann für eine glatte Funktion $f(\vartheta)$ die Identität

$$(L_-/\hbar)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\varphi} f(\vartheta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\ell-1)\varphi}\, \frac{1}{\sin^{\ell-1}\vartheta}\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cos\vartheta}\, \big(f(\vartheta)\sin^{\ell}\vartheta\big)$$

und erschließen Sie daraus für die Kugelflächenfunktionen die Darstellung

$$Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) = \frac{(-1)^{\ell}}{2^{\ell}\ell!}\sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\, \frac{1}{\sin^{m}\vartheta}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cos\vartheta}\right)^{\ell-m} \sin^{2\ell}\vartheta\ .$$

c) Die zugeordneten Legendre-Funktionen $P_{\ell m}(x)$ gehorchen für $m \geq 0$ der Gleichung

$$P_{\ell,-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\, P_{\ell m}(x)\ .$$

(Diese Gleichung brauchen Sie ausnahmsweise *nicht* zu beweisen!) Zeigen Sie damit, dass die in b) gefundene Darstellung der Kugelflächenfunktionen mit der in der Vorlesung angegebenen übereinstimmt. **(3P)**

36) **Die sphärischen Besselfunktionen**

Die Funktionen $j_\ell(z)$ und $n_\ell(z)$ sind unabhängige Lösungen der Differentialgleichung

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + \frac{2}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} - \frac{\ell(\ell+1)}{z^2} + 1\right] R(z) = 0\ ,$$

die für $z \to 0$ regulär bleiben bzw. singulär werden.

a) Zeigen Sie, dass diese Lösungen für $\ell = 0$ besonders einfach sind:

$$j_0(z) = \frac{\sin z}{z} \qquad \text{und} \qquad n_0(z) = -\frac{\cos z}{z}\ .$$

b) Machen Sie für $\ell > 0$ den in der Vorlesung besprochenen Ansatz $R(z) = z^{\ell} u_\ell(z)$ und zeigen Sie, dass die Funktionen $u_\ell(z)$ der Gleichung

$$u_\ell''(z) + \frac{2(\ell+1)}{z} u_\ell'(z) + u_\ell(z) = 0$$

gehorchen, die Funktionen $v_\ell(z) = u_\ell'(z)/z$ dagegen der Gleichung

$$v_\ell''(z) + \frac{2(\ell+2)}{z} v_\ell'(z) + v_\ell(z) = 0\ .$$

Folgern Sie, dass

$$j_\ell(z) = (-z)^{\ell}\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\ell}\frac{\sin z}{z} \qquad \text{und} \qquad n_\ell(z) = -(-z)^{\ell}\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^{\ell}\frac{\cos z}{z}\ ,$$

wobei die Vorzeichen erneut Konvention sind.

c) Geben Sie die Funktionen $j_\ell(z)$ und $n_\ell(z)$ für $\ell = 0, 1, 2$ explizit an.

d) Welches asymptotische Verhalten besitzen die Funktionen $j_\ell(z)$ und $n_\ell(z)$ für $z \to 0$ sowie für $z \to \infty$? **(4P)**