

Übungen zur Vorlesung *Quantenmechanik*

(SoSe 2013, Übungsblatt 9)

<http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingQM/QM.html>

Abgabe: Dienstag, 4. Juni bis 12:00 Uhr

30) Der Drehimpulsoperator in Kugelkoordinaten

a) Drücken Sie die kartesischen Komponenten L_x , L_y und L_z des Drehimpulsoperators in Kugelkoordinaten aus.

Vorschlag: Es kann sinnvoll sein, zunächst den Nabla-Operator in Kugelkoordinaten darzustellen. Das gelingt mit Hilfe des Ansatzes

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} &= \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \vec{e}_r c_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta c_\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi c_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi},\end{aligned}$$

wobei \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z die kartesischen Einheitsvektoren und \vec{e}_r , \vec{e}_ϑ und \vec{e}_φ die Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten (also das "lokale Dreibein") bezeichnen; die Koeffizienten c_r , c_ϑ und c_φ sind zu bestimmen. Die Aufgabe kann jedoch auch vollständig *ohne* Verwendung des lokalen Dreibeins gelöst werden (wenn auch weniger elegant). Sie benötigen in jedem Fall die Elemente der Transformationsmatrix

$$\frac{\partial(r, \vartheta, \varphi)}{\partial(x, y, z)},$$

ausgedrückt durch Kugelkoordinaten.

b) Geben Sie auch die Operatoren L_+ , L_- und \vec{L}^2 in Kugelkoordinaten an. Wie hängt \vec{L}^2 mit dem schon in Aufgabe 12 betrachteten Operator $-\Delta$ zusammen? **(4P)**

31) Weiteres zum Drehimpulsoperator

a) Welche Werte besitzen die Kommutatoren $[L_j, p_k]$ ($j, k = 1, 2, 3$) ?

b) Beweisen Sie die wichtige Operatorgleichung

$$-\hbar^2 \Delta = -\frac{\hbar^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\vec{L}^2}{r^2}.$$

Hinweis: Gehen Sie aus von der Darstellung $\vec{L} = \hbar \vec{r} \times \vec{\nabla}$ und benutzen Sie den ε -Kalkül zur Berechnung von \vec{L}^2 . Beachten Sie, dass

$$\vec{r} \cdot \vec{\nabla} = r \frac{\partial}{\partial r}.$$

(2P)

32) Energiebänder für ein periodisches Stufenpotential

Ein periodisches Potential mit der Periodizitätslänge $L = a + b$ werde für $0 \leq x < a + b$ definiert durch

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < a \\ V_0 & \text{für } a \leq x < a + b, \end{cases}$$

wobei $V_0 > 0$, und wird außerhalb dieses Intervalls periodisch fortgesetzt.

a) Zeigen Sie, dass für $0 < E < V_0$ die Transfermatrix für den Übergang vom Intervall $0 \leq x < a$ in das Intervall $a + b \leq x < 2a + b$ die Gestalt

$$T = \begin{pmatrix} e^{-ikb} \left[\cosh \kappa b - \frac{i}{2} \left(\frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa} \right) \sinh \kappa b \right] & -e^{-ik(2a+b)} \frac{i}{2} \left(\frac{\kappa}{k} + \frac{k}{\kappa} \right) \sinh \kappa b \\ e^{ik(2a+b)} \frac{i}{2} \left(\frac{\kappa}{k} + \frac{k}{\kappa} \right) \sinh \kappa b & e^{ikb} \left[\cosh \kappa b + \frac{i}{2} \left(\frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa} \right) \sinh \kappa b \right] \end{pmatrix}$$

besitzt, wobei wie üblich $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ und $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$.

b) Folgern Sie, dass die erlaubten Bloch-Wellen mit Wellenzahl q die Gleichung

$$\cos[q(a + b)] = \cosh \kappa b \cos ka + \frac{\kappa^2 - k^2}{2k\kappa} \sinh \kappa b \sin ka$$

erfüllen müssen. Zeigen Sie, dass Energien mit $ka = n\pi$ für jede ganze Zahl n "verboten" sind.

c) Welche Gleichung müssen die Bloch-Zustände erfüllen, wenn $E > V_0$? (3P)

33) Bindungszustand für ein δ -Potential

Zeigen Sie, dass das eindimensionale Potential

$$V(x) = -W_0 \delta(x)$$

für jedes $W_0 > 0$ genau einen Bindungszustand zulässt. Wie lautet die Energie dieses Zustandes? (1P)