Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 15. Mai 2013

Übungen zur Vorlesung *Quantenmechanik*

(SoSe 2013, Übungsblatt 7)

`http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingQM/QM.html`

Abgabe: Dienstag, 21. Mai bis 12:00 Uhr

23) **Bindungs– und Kontinuumszustände**

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m in dem eindimensionalen Potential

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{für} \quad x < 0 \\ 0 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq a \\ V_0 & \text{für} \quad a < x \,, \end{cases} \qquad \text{wobei} \;\; V_0 > 0 \,.$$

a) Zeigen Sie, dass die normierbaren Eigenfunktionen für hinreichend große Werte von V_0 und kleine Quantenzahlen n näherungsweise die Energieeigenwerte

$$E_n \approx E_n^{(0)} - \frac{2}{\kappa_n^{(0)} a} E_n^{(0)}$$

besitzen. Dabei bezeichnet $E_n^{(0)}$ die Eigenwerte, die man für $V_0 \to +\infty$ erhält; ferner ist $\kappa_n^{(0)} = \sqrt{2m(V_0 - E_n^{(0)})}/\hbar$. Warum ist E_n kleiner als $E_n^{(0)}$?

b) Konstruieren Sie nicht-normierbare Lösungen der stationären Schrödingergleichung für $E > V_0$. Warum gibt es in diesem Fall keine Quantisierungsbedingung?

c) Zeigen Sie, dass im Unterschied zu Aufgabe 20 das hier untersuchte Potential $V(x)$ *nicht* in jedem Fall eine normierbare Eigenfunktion zulässt, sondern dass V_0 dazu eine gewisse Mindeststärke haben muss. Können Sie diesen Unterschied "anschaulich" erklären? (Für die Bearbeitung dieser Aufgabe ist die Lösung von Aufgabe 20 *nicht* erforderlich!) **(3P)**

24) **Die konfluente hypergeometrische Differentialgleichung**

a) Zeigen Sie, dass die aus Aufgabe 19 bekannte hypergeometrische Differentialgleichung durch die Substitution $y = \beta z$ und den Grenzübergang $\beta \to \infty$ in die sogenannte *konfluente hypergeometrische Differentialgleichung*

$$y \, \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}y^2} + (\gamma - y) \, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} - \alpha \, u(y) = 0$$

überführt wird. Lösen Sie diese Gleichung mit Hilfe des bereits aus Aufgabe 19 bekannten Potenzreihenansatzes

$$u(y) = y^m \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu y^\nu$$

und zeigen Sie, dass für $\gamma \neq -n$ bzw. $2 - \gamma \neq -n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ ein Fundamentalsystem durch die konfluenten hypergeometrischen Funktionen

$$u_1(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_\nu}{(\gamma)_\nu} \frac{y^\nu}{\nu!} \equiv M(\alpha; \gamma; y)$$

und

$$u_2(y) = y^{1-\gamma}\, M(\alpha+1-\gamma; 2-\gamma; y)$$

gegeben wird. Unter welchen Bedingungen brechen diese Reihen ab?

Wichtige Bemerkung: Falls die Reihe der konfluenten hypergeometrischen Funktion *nicht* abbricht, lautet ihr asymptotisches Verhalten (siehe Abramowitz/Stegun 13.5.1)

$$M(\alpha;\gamma;y) \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\, \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi\alpha}\, y^{-\alpha} + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}\, \mathrm{e}^{y} y^{\alpha-\gamma} \ .$$

b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die stationäre Schrödingergleichung des harmonischen Oszillators, also

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}x^2\right)\varphi(x) = \varepsilon\varphi(x) \qquad \text{mit } \varepsilon = E/(\hbar\omega) \ ,$$

durch die Substitution $y = x^2$ in die Gleichung

$$y\,\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}y^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} + \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{y}{4}\right)\varphi(y) = 0$$

übergeht. Zeigen Sie, dass man daraus durch den Ansatz $\varphi(y) = u(y)\exp(-y/2)$ eine konfluente hypergeometrische Differentialgleichung mit den Parametern $\gamma = 1/2$ sowie $\alpha = -\varepsilon/2 + 1/4$ erhält, und erschließen Sie allein aus dieser Tatsache das Spektrum des harmonischen Oszillators.

c) Drücken Sie die Hermite-Polynome durch die konfluenten hypergeometrischen Funktionen aus. **(5P)**

25) **Kohärente Zustände (Teil 1)**

Die in dieser Aufgabe eingeführten *kohärenten Zustände* ψ_z spielen in der modernen Quantenoptik eine überragend wichtige Rolle. Es ist sogar gelungen, solche Zustände für Materiewellen von ultrakalten ^{87}Rb-Atomen zu präparieren: Siehe dazu M. Greiner *et al.*, Nature **419**, 5. September 2002, S. 51.

Es sei ψ_z ein Eigenzustand des Vernichtungsoperators a eines harmonischen Oszillators mit der Kreisfrequenz ω:

$$a\psi_z = z\psi_z \ .$$

Da a nicht hermitesch ist, kann der Eigenwert z auch komplex sein. Zeigen Sie, dass die Betragsquadrate der Entwicklungskoeffizienten von ψ_z in der Basis $\{\varphi_n\}$ der Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators poissonverteilt sind, nämlich

$$|\langle\varphi_n|\psi_z\rangle|^2 = \frac{|z|^{2n}}{n!}\,\mathrm{e}^{-|z|^2} \ ,$$

und dass die Zeitentwicklung von ψ_z durch

$$\psi_z(t) = \mathrm{e}^{-|z|^2/2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}\,\exp(z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}a^\dagger)\varphi_0$$

beschrieben wird. (Wird fortgesetzt!) **(2P)**