

Übungen zur Vorlesung *Quantenmechanik*

(SoSe 2013, Übungsblatt 6)

<http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingQM/QM.html>

Abgabe: Dienstag, 14. Mai bis 12:00 Uhr

20) Bindungszustände für eine Potentialmulde

In dieser Aufgabe soll das Spektrum der „Bindungszustände“ für ein Teilchen der Masse m in einem eindimensionalen Potential der Form

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(x/a)} \quad (V_0 > 0)$$

gefunden werden; diese Zustände sind quadratintegrabel und besitzen (im Unterschied zu den hier nicht betrachteten „Streuzuständen“) einen *negativen* Energieeigenwert.

a) Machen Sie für die stationären Zustände den Ansatz

$$\varphi(x) = [\cosh(x/a)]^{-2\lambda} u(x)$$

mit zunächst noch unbestimmtem λ und zeigen Sie dann, dass für

$$\lambda = \frac{1}{4} \left[\sqrt{\frac{8mV_0a^2}{\hbar^2} + 1} - 1 \right] \quad \text{und} \quad \kappa = \sqrt{\frac{m|E|a^2}{2\hbar^2}}$$

die stationäre Schrödingergleichung in die Gleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{4\lambda}{a} \tanh(x/a) \frac{du}{dx} + \frac{4}{a^2} (\lambda^2 - \kappa^2) u(x) = 0$$

überführt wird.

b) Zeigen Sie weiterhin, dass man daraus durch die Substitution

$$z = -\sinh^2(x/a)$$

eine aus Aufgabe 19 bekannte hypergeometrische Differentialgleichung erhält:

$$z(1-z) \frac{d^2u}{dz^2} + \left[\frac{1}{2} - (1-2\lambda)z \right] \frac{du}{dz} - (\lambda^2 - \kappa^2) u(z) = 0.$$

c) Erklären Sie, warum man mit Hilfe der in Aufgabe 19 eingeführten Fundamentallösungen $u_1(z)$ bzw. $u_2(z)$ Bindungszustände gerader bzw. ungerader Parität konstruieren kann, sofern die jeweilige Reihe abbricht. Wie lauten daher die Energieeigenwerte der Bindungszustände? Wieviele Bindungszustände gibt es? Zeigen Sie, dass für *jede* Wahl von $V_0 > 0$ und $a > 0$ mindestens ein Bindungszustand existiert. **(4P)**

21) Aufenthalt im klassisch verbotenen Bereich

Ein Quantenteilchen bewege sich im Potential eines eindimensionalen harmonischen Oszillators. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im klassisch verbotenen Gebiet anzutreffen, wenn es sich (i) im Grundzustand, (ii) im ersten angeregten Zustand und (iii) im zweiten angeregten Zustand befindet?

Hinweis: Zur Lösung dieser Aufgabe werden numerische Werte des Wahrscheinlichkeitsintegrals

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z dy e^{-y^2/2}$$

benötigt, die Sie z.B. in dem bewährten „*Taschenbuch der Mathematik*“ von Bronstein und Semendjajew finden. **(3P)**

22) Zum Umgang mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

a) Beweisen Sie die Vertauschungsrelationen

$$[a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1} \quad \text{und} \quad [a^\dagger, a^n] = -na^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

für den Erzeugungsoperator a^\dagger und den Vernichtungsoperator a des harmonischen Oszillators.

b) Es sei ψ_0 die Grundzustandsfunktion des harmonischen Oszillators. Zeigen Sie allein mit Hilfe der Eigenschaften der Operatoren a und a^\dagger , dass die Funktion $\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n\psi_0$ eine Eigenfunktion des Operators $H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1/2)$ ist.

c) Berechnen Sie das Unschärfeprodukt für ein Teilchen, das sich im n -ten angeregten Zustand eines harmonischen Oszillatorpotentials befindet.

Hinweis: Drücken Sie den Orts- und den Impulsoperator durch a und a^\dagger aus! **(3P)**