Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 1. Mai 2013

Übungen zur Vorlesung *Quantenmechanik*

(SoSe 2013, Übungsblatt 5)

`http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingQM/QM.html`

Abgabe: Dienstag, 7. Mai bis 12:00 Uhr

17) **Zwei wichtige Kommutatorbeziehungen**

Es seien $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ lineare Operatoren. Weiterhin bezeichnen $\widehat{p}$ und $\widehat{x}$ den Impuls– bzw. Ortsoperator in einer Raumdimension; a und b sind Konstanten mit der Dimension einer Länge. Schließlich bezeichne λ einen komplexen Parameter.

a) Beweisen Sie die Beziehung

$$\mathrm{e}^{\lambda\widehat{A}}\,\widehat{B}\,\mathrm{e}^{-\lambda\widehat{A}} = \widehat{B} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\,[\widehat{A},\widehat{B}]_{(n)}\ ,$$

wobei die "Schachtelkommutatoren" $[\widehat{A},\widehat{B}]_{(n)}$ rekursiv durch $[\widehat{A},\widehat{B}]_{(n)} = \Big[\widehat{A},[\widehat{A},\widehat{B}]_{(n-1)}\Big]$ und $[\widehat{A},\widehat{B}]_{(1)} = [\widehat{A},\widehat{B}]$ definiert werden. Vereinfachen Sie dann mit Hilfe dieser Beziehung das Produkt $\exp(\mathrm{i}\widehat{p}a/\hbar)\,\widehat{x}\,\exp(-\mathrm{i}\widehat{p}a/\hbar)$.

b) Zeigen Sie: Wenn $\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ mit $[\widehat{A},\widehat{B}]$ kommutieren, gilt

$$\mathrm{e}^{\widehat{A}+\widehat{B}} = \mathrm{e}^{\widehat{A}}\,\mathrm{e}^{\widehat{B}}\,\mathrm{e}^{-[\widehat{A},\widehat{B}]/2} = \mathrm{e}^{\widehat{B}}\,\mathrm{e}^{\widehat{A}}\,\mathrm{e}^{+[\widehat{A},\widehat{B}]/2}\ .$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst für $G(\lambda) = \mathrm{e}^{\lambda\widehat{A}}\,\mathrm{e}^{\lambda\widehat{B}}$ die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}G(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \Big(\widehat{A}+\widehat{B}+\lambda[\widehat{A},\widehat{B}]\Big)\,G(\lambda)\ .$$

Vereinfachen Sie schließlich das Produkt $\exp(\mathrm{i}\widehat{p}a/\hbar)\,\exp(\mathrm{i}\widehat{x}/b)\,\exp(-\mathrm{i}\widehat{p}a/\hbar)$. **(3P)**

18) **Der harmonische Oszillator mit zeitabhängiger äußerer Kraft**

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + xF(t)\right)\psi(x,t) \qquad (1)$$

für einen harmonischen Oszillator, der durch eine äußere Kraft $-F(t)$ angetrieben wird, mit Hilfe einer Lösung $\xi(t)$ der klassischen Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\xi} = -m\omega^2\xi - F(t)$$

auf die stationäre Schrödingergleichung des Oszillators *ohne* äußere Kraft zurückgeführt werden kann. [Dieser überaus instruktive "Klassiker" geht zurück auf eine Arbeit von K. Husimi, nachzulesen in Prog. Theor. Phys. **9**, 381 (1953).]

a) Zeigen Sie, dass die transformierte Wellenfunktion $\widetilde{\psi}(y,t) \equiv \psi(y+\xi(t),t)$ der Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar\,\partial_t\widetilde{\psi} = \left(\mathrm{i}\hbar\dot{\xi}\,\partial_y - \frac{\hbar^2}{2m}\partial_y^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(y+\xi)^2 + (y+\xi)F(t)\right)\widetilde{\psi}$$

gehorcht.

b) Benutzen Sie nun den Ansatz $\widetilde{\psi}(y,t) = \exp(\mathrm{i}m\dot{\xi}y/\hbar)\,\varphi(y,t)$ und zeigen Sie, dass die Schrödingergleichung für die dadurch definierte Funktion $\varphi(y,t)$ die Form

$$\mathrm{i}\hbar\,\partial_t\varphi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_y^2 + \frac{1}{2}m\omega^2y^2 - L(t)\right)\varphi$$

annimmt. Dabei ist $L(t) = \frac{1}{2}m\dot{\xi}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\xi^2 - \xi F(t)$ die klassische Lagrange-Funktion des Teilchens. Drücken Sie schließlich die Lösungen der Schrödingergleichung (1) durch die stationären Zustände des Oszillators aus. **(4P)**

19) **Die hypergeometrische Reihe**

Treue Freunde bei der Lösung vieler Schrödinger-Eigenwertprobleme (Beispiel: Aufgabe 20 auf dem kommenden Übungsblatt!) sind die *Gaußsche Differentialgleichung*

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} - \alpha\beta\,u(z) = 0$$

und die *hypergeometrische Reihe*

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_\nu(\beta)_\nu}{(\gamma)_\nu}\,\frac{z^\nu}{\nu!}\ ,$$

wobei das Symbol $(\alpha)_\nu$ durch

$$(\alpha)_\nu = \alpha(\alpha+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+\nu-1)$$

definiert wird. Mit Hilfe dieser Reihe kann das häufig benutzte (Kugelflächenfunktionen, harmonischer Oszillator, ...) Abbruchkriterium für die Konstruktion von Eigenfunktionen formalisiert und routinemäßig eingesetzt werden.

Machen Sie zur Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung den Ansatz

$$u(z) = z^m\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu z^\nu$$

und zeigen Sie, dass für $\gamma \neq -n$ $(n \in \mathbb{N})$ ein Fundamentalsystem durch

$$u_1(z) = F(\alpha,\beta;\gamma;z) \qquad \text{und} \qquad u_2(z) = z^{1-\gamma}\,F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma;2-\gamma;z)$$

gegeben wird. Unter welchen Bedingungen brechen diese Reihen ab? **(3P)**

Wichtige Bemerkung: Die hypergeometrische Reihe kann analytisch nach außerhalb ihres Konvergenzkreises fortgesetzt werden; das asymptotische Verhalten der Fortsetzung lautet

$$F(\alpha,\beta;\gamma;z) \sim \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha} + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(-z)^{-\beta}\ .$$