Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 24. April 2013

Übungen zur Vorlesung *Quantenmechanik*

(SoSe 2013, Übungsblatt 4)

`http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingQM/QM.html`

Abgabe: Dienstag, 30. April bis 12:00 Uhr

13) **Ortsunschärfe für das "Teilchen im Kasten"**

a) Zeigen Sie, dass die Ortsunschärfe Δx_n für ein quantenmechanisches Teilchen, das sich im n-ten Eigenzustand eines "Kastenpotentials" der Breite a befindet, durch

$$(\Delta x_n)^2 = \frac{a^2}{12}\left[1 - \frac{6}{n^2\pi^2}\right]$$

gegeben wird.

b) Betrachten Sie nun *klassische* Teilchen, die sich mit zufällig gewählten Anfangsbedingungen im Kastenpotential bewegen, und berechnen Sie die zugehörige klassische Streuung Δx_{cl}. Was fällt Ihnen auf? **(2P)**

14) **Impulsunschärfe für das "Teilchen im Kasten"**

a) Berechnen Sie die quantenmechanische Impulsverteilung für ein Teilchen, das sich im n-ten Eigenzustand eines "Kastenpotentials" der Breite a befindet. Was fällt Ihnen auf?

b) Berechnen Sie nun die Impulsunschärfe Δp_n für ein Teilchen im n-ten Eigenzustand des Kastenpotentials und daraus dann mit Hilfe des Resultates von Aufgabe 13 a) das Unschärfeprodukt $\Delta p_n \cdot \Delta x_n$. Welchen Wert erhält man insbesondere für $n = 1$? **(3P)**

15) **Invarianz unter kombinierten Phasen-Eichtransformationen**

In Gegenwart eines elektromagnetischen Feldes, das durch die Potentiale $\vec{A}(\vec{x}, t)$ und $\Phi(\vec{x}, t)$ beschrieben wird, lautet die Schrödingergleichung für ein Teilchen der Masse m und Ladung e bekanntlich

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\vec{\nabla} - e\vec{A}(\vec{x}, t)\right)^2 \psi(\vec{x}, t) + e\Phi(\vec{x}, t)\,\psi(\vec{x}, t)\ .$$

Berechnen Sie zunächst die zugehörige Wahrscheinlichkeitsstromdichte und zeigen Sie dann deren Invarianz unter den in der Vorlesung besprochenen kombinierten Phasen-Eichtransformationen. **(2P)**

16) **Die Kugelflächenfunktionen (Teil 2)**

Wir setzen nun Aufgabe 12 fort: Vor allem müssen die Eigenwerte α bestimmt werden!

Ausgangspunkt ist die verallgemeinerte Legendresche Differentialgleichung, also Gl. (5) aus Aufgabe 12. Setzt man dort $m = 0$, erhält man die *Legendresche Differentialgleichung*

$$\left[(1-t^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - 2t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \alpha\right] g_0(t) = 0 \ .$$

a) Gehen Sie aus von einem Potenzreihenansatz

$$g_0(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^\nu$$

und zeigen Sie, dass die Koeffizienten c_ν der Rekursionsformel

$$c_{\nu+2} = \frac{\nu(\nu+1)-\alpha}{(\nu+1)(\nu+2)}\, c_\nu$$

gehorchen müssen. Folgern Sie, dass zulässige (was bedeutet das?) Lösungen nur erhalten werden können, wenn

$$\alpha = \ell(\ell+1)$$

für eine ganze Zahl $\ell = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

<u>Hinweis:</u> Für $|t| < 1$ gilt

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t^4 + \ldots &= 1 - \frac{1}{2}\ln(1-t^2) \\ t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + \ldots &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) \ . \end{aligned}$$

b) Normiert man die für $\alpha = \ell(\ell+1)$ auftauchenden Polynome $g_{0,\ell}(t)$ derart, dass $g_{0,\ell}(1) = 1$, erhält man die *Legendre-Polynome* $P_\ell(t)$. Geben Sie diese Polynome für $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ explizit an.

c) Die Funktionen

$$P_\ell^{|m|}(t) = (1-t^2)^{|m|/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{|m|} P_\ell(t)$$

nennt man *zugeordnete Legendre-Funktionen* (erster Art). Begründen Sie, warum die in Aufgabe 12 gesuchten Eigenfunktionen die Form

$$Y_{\ell,m}(\vartheta,\varphi) = N_{\ell,m}\, P_\ell^{|m|}(\cos\vartheta)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\right)$$

haben, wobei $N_{\ell,m}$ eine Normierungskonstante ist. Welche Werte kann die ganze Zahl m nun noch annehmen? **(3P)**