Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 17. April 2013

Übungen zur Vorlesung *Quantenmechanik*

(SoSe 2013, Übungsblatt 3)

`http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingQM/QM.html`

Abgabe: Dienstag, 23. April bis 12:00 Uhr

9) **Zum Umgang mit Kommutatoren**

a) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Kommutatorgleichungen:

(i) $[\widehat{A}, \widehat{B}] = -[\widehat{B}, \widehat{A}]$

(ii) $[\widehat{A}, \widehat{B}\widehat{C}] = [\widehat{A}, \widehat{B}]\widehat{C} + \widehat{B}[\widehat{A}, \widehat{C}]$

(iii) $\left[\widehat{A}, [\widehat{B}, \widehat{C}]\right] + \left[\widehat{B}, [\widehat{C}, \widehat{A}]\right] + \left[\widehat{C}, [\widehat{A}, \widehat{B}]\right] = 0$

b) Es sei $\widehat{H} = \widehat{p}^2/(2m) + \widehat{V}$ der Hamilton-Operator für die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem Potential $V(x)$. Berechnen Sie die Kommutatoren $[\widehat{H}, \widehat{p}]$ und $[\widehat{H}, \widehat{x}]$. **(2P)**

10) **Erwartungswert der kinetischen Energie für ein Gauß-Wellenpaket**

Betrachten Sie noch einmal das eindimensionale Gauß-Wellenpaket aus Aufgabe 5 und berechnen Sie für dieses Paket den Erwartungswert der kinetischen Energie. Zeigen Sie, dass dieser Erwartungswert *größer* ist als die kinetische Energie eines klassischen Teilchens mit dem Impuls $p = \hbar k_0$. Um wieviel? Ist das Auftauchen dieser Differenz plausibel? **(2P)**

11) **Die "allgemeine Unschärferelation"**

$\widehat{A}$ und $\widehat{B}$ seien hermitesche Operatoren; ψ sei eine normierte Wellenfunktion. Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung eingeführten Streuungen ΔA und ΔB für diesen Zustand der folgenden Ungleichung gehorchen:

$$\Delta A \, \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle \psi \mid [\widehat{A}, \widehat{B}] \mid \psi \rangle \right| .$$

Hinweis: Zeigen sie zunächst, dass $\left| \langle \psi \mid [\widehat{A}, \widehat{B}] \mid \psi \rangle \right| \leq 2 \, \|\widehat{A}\psi\| \, \|\widehat{B}\psi\|$ und ersetzen Sie dann $\widehat{A}$ durch $\widehat{A} - \langle A \rangle$ sowie $\widehat{B}$ durch $\widehat{B} - \langle B \rangle$. **(2P)**

12) **Die Kugelflächenfunktionen (Teil 1)**

In dieser Aufgabe werden Lösungen der Eigenwertgleichung

$$(-\Lambda^2) \, Y(\vartheta, \varphi) = \alpha Y(\vartheta, \varphi) \tag{1}$$

konstruiert, wobei der lineare Differentialoperator $-\Lambda^2$ durch

$$-\Lambda^2 = -\left[\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right]$$

gegeben ist. Die Eigenfunktionen sollen auf der Oberfläche der Einheitskugel (d.h. für $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) definiert, stetig und eindeutig sein. Ferner fordert man ihre Normierung:

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\vartheta \, \sin\vartheta \, |Y(\vartheta,\varphi)|^2 = 1 \, .$$

Diese wichtige Eigenwertaufgabe tritt in der Quantenmechanik bei der Lösung der stationären Schrödinger-Gleichung für radialsymmetrische Potentiale (also z.B. beim Wasserstoff-Atom) auf, aber auch bereits bei klassischen Randwertproblemen.

a) Zeigen Sie, dass durch den Produktansatz $Y(\vartheta,\varphi) = F(\vartheta)\Phi(\varphi)$ die partielle Differentialgleichung (1) in die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \left[\sin\vartheta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\left(\sin\vartheta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\right) + \alpha \sin^2\vartheta\right] F(\vartheta) &= \lambda F(\vartheta) & (2) \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\Phi(\varphi) &= -\lambda \Phi(\varphi) & (3) \end{aligned}$$

überführt wird, wobei λ eine noch zu bestimmende Konstante ist.

b) Folgern Sie aus der geforderten Eindeutigkeit, dass $\lambda = m^2$, wobei $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ eine ganze Zahl ist. Die normierten Lösungen von (3) erhalten daher die einfache Form

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi} \, .$$

c) Zeigen Sie, dass die ϑ-Gleichung (2) durch Übergang zu der neuen Variablen $t = \cos\vartheta$ die Gestalt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(1-t^2)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right] + \left(\alpha - \frac{m^2}{1-t^2}\right) f(t) = 0 \tag{4}$$

annimmt, wobei $f(t) = F(\vartheta)$. Da hier nur m^2, nicht jedoch m selbst eingeht, reicht es im folgenden, nur den Fall $m \geq 0$ zu untersuchen.

d) Zur Lösung dieser Gleichung (4) macht man den Ansatz

$$f(t) = (1-t^2)^{m/2} g_m(t) \, .$$

(Können Sie diesen Ansatz begründen?) Zeigen Sie, dass die dadurch definierten Funktionen $g_m(t)$ die Differentialgleichung

$$\left\{(1-t^2)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - 2(m+1)t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + [\alpha - m(m+1)]\right\} g_m(t) = 0 \tag{5}$$

erfüllen. (Dies ist die "verallgemeinerte Legendresche Differentialgleichung".)

e) Diese Gleichung (5) besitzt eine bemerkenswerte Eigenschaft: Ist $g_0(t)$ eine Lösung für $m = 0$, dann ist

$$g_m(t) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^m g_0(t)$$

eine Lösung für beliebiges ganzzahliges $m > 0$. Wieso? **(4P)**

Fazit: Um die gesuchten Eigenfunktionen $Y(\vartheta,\varphi)$ und ihre Eigenwerte α zu bestimmen, muss nun die Gleichung (5) "nur" noch für $m = 0$ gelöst werden — das geschieht auf dem nächsten Übungsblatt!