

Übungen zur Vorlesung *Quantenmechanik*

(SoSe 2013, Übungsblatt 1)

<http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingQM/QM.html>

Abgabe: Dienstag, 9. April bis 12:00 Uhr

1) Thermische Energie klassischer und quantenmechanischer Oszillatoren

a) Die Hamiltonfunktion eines (eindimensionalen) klassischen harmonischen Oszillators mit der Kreisfrequenz ω lautet

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 ;$$

nach dem Boltzmannschen Prinzip ist die Wahrscheinlichkeitsdichte dafür, den Oszillator im thermischen Gleichgewicht mit einem Wärmebad der Temperatur T im Phasenraum-punkt (p, q) anzutreffen, proportional zu $\exp(-\beta H(p, q))$. Dabei ist $\beta = 1/(k_B T)$ mit der Boltzmann-Konstanten k_B . Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $\langle E \rangle_{\text{cl}}$ der Energie eines solchen klassischen Oszillators durch

$$\langle E \rangle_{\text{cl}} = k_B T$$

gegeben wird und daher von seiner Frequenz ω unabhängig ist.

b) Angenommen, der Oszillator kann nicht (wie in der klassischen Physik) jede beliebige Energie aufnehmen, sondern nur ganzzahlige Vielfache E_n von $\hbar\omega$, wobei die Konstante \hbar die Dimension einer Wirkung besitzt: $E_n = n \cdot \hbar\omega$ mit $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Zeigen Sie, dass dann der thermische Erwartungswert $\langle E \rangle_{\text{qm}}$ der Anregungsenergie des Oszillators der Beziehung

$$\langle E \rangle_{\text{qm}} = \frac{\hbar\omega}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1}$$

gehört. In welchem Grenzfall erhält man aus diesem „quantenmechanischen“ Resultat das klassische zurück? **(3P)**

2) Fraunhofer-Beugung am Gitter

Bei Fraunhofer-Beugung von Wellen der Wellenlänge λ an einem Spalt der Breite s berechnet sich die in den Winkel ϑ (bzgl. der Strahlrichtung) gebeugte Intensität $I(\vartheta)$ nach einer aus der Optik bekannten Formel (siehe z.B. Bergmann, Schaefer: Lehrbuch der Experimentalphysik, Band III: Optik) zu

$$I(\vartheta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi s}{\lambda} \sin \vartheta\right)}{\left(\frac{\pi s}{\lambda} \sin \vartheta\right)^2},$$

wobei I_0 die Intensität in Vorwärtsrichtung ($\vartheta = 0$) bezeichnet.

a) Für ein Strichgitter, das aus M identischen Spalten der Breite s besteht, die den Abstand d voneinander haben, wird die Fraunhofer-Beugung durch

$$I(\vartheta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi s}{\lambda} \sin \vartheta\right)}{\left(\frac{\pi s}{\lambda} \sin \vartheta\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{M\pi d}{\lambda} \sin \vartheta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \vartheta\right)}$$

beschrieben. Erklären Sie diese Gleichung und beschreiben Sie das Beugungsbild. Unter welchen Winkeln treten die Hauptmaxima auf?

b) Ein Strahl von C_{60} -Molekülen („buckyballs“) wird auf ein Beugungsgitter mit einem Spaltabstand von $d = 100$ nm geschossen. Die Moleküle haben eine Geschwindigkeit von 220 m/s; aufgrund ihres Wellencharakters werden sie gebeugt. Die Beugungsfigur wird in einer Ebene betrachtet, die sich 1.25 m hinter dem Gitter befindet. Wie groß ist der Abstand zwischen den Hauptmaxima nullter und erster Ordnung in dieser Ebene? **(2P)**

3) Eigenschaften der Fourier-Transformation

Sei $\psi(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, eine integrable Funktion. Die Fourier-Transformation bildet ψ ab auf eine Funktion $\widehat{\psi}$, definiert durch

$$\widehat{\psi}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} d^n x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \psi(\vec{x}) .$$

Die Fourier-Transformation wird in der Quantenmechanik häufig benötigt, da sie den Zusammenhang zwischen der Wellenfunktion im Ortsraum und der Wellenfunktion im Impulsraum herstellt.

a) Beweisen Sie für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften dieser Abbildung:

- (i) $\psi(\vec{x} - \vec{a})$ wird abgebildet auf $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{a}} \widehat{\psi}(\vec{k})$;
- (ii) $e^{i\vec{b}\cdot\vec{x}} \psi(\vec{x})$ wird abgebildet auf $\widehat{\psi}(\vec{k} - \vec{b})$;
- (iii) $\lambda^{-n/2} \psi(\vec{x}/\lambda)$ wird abgebildet auf $\widehat{\psi}(\lambda\vec{k})$.

b) Geben Sie (für $n = 1$) die Fourier-Transformierte von

$$\psi(x) = N e^{ipx} \left(e^{-(x-x_1)^2/(2a^2)} + e^{-(x-x_2)^2/(2a^2)} \right)$$

an, wobei N , p , x_1 , x_2 and a reelle Konstanten sind. Wie lautet $|\widehat{\psi}(k)|$? **(2P)**

4) Die Hermite-Polynome

Die in dieser Aufgabe eingeführten Polynome werden später bei der quantenmechanischen Behandlung des harmonischen Oszillators eine wichtige Rolle spielen.

Die Hermite-Polynome $H_n(x)$ werden definiert durch die „Rodriguez-Formel“

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2} .$$

Berechnen und skizzieren Sie diese Polynome für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Was fällt Ihnen auf, wenn Sie die Nullstellen zählen? Machen Sie sich klar, dass $H_n(x)$ ein Polynom n -ten Grades ist. Wie lautet der Koeffizient von x^n ? **(3P)**