

Übungen zur Vorlesung *Einführung in die Theoretische Physik*

(SoSe 2015, Übungsblatt 13)

<http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingITP/ITP.html>

Abgabe: Dienstag, 14. Juli bis 12:00 Uhr

49) **Zum Stokesschen Integralsatz**

a) Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{v}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2xz + 3y^2 \\ 4yz^2 \end{pmatrix} .$$

Verifizieren Sie die Aussage des Stokesschen Satzes für das Einheitsquadrat in der y - z -Ebene mit den Ecken $(0, 0, 0)^t$, $(0, 1, 0)^t$, $(0, 1, 1)^t$ und $(0, 0, 1)^t$.

b) Es sei $\vec{v}(\vec{r})$ ein differenzierbares Vektorfeld und $\varphi(\vec{r})$ ein differenzierbares Skalarfeld. Weiterhin sei F ein reguläres Flächenstück mit Rand ∂F . Zeigen Sie, dass

$$\int_F d\vec{f} \cdot \varphi \vec{\nabla} \times \vec{v} = \oint_{\partial F} d\vec{r} \cdot \varphi \vec{v} + \int_F d\vec{f} \cdot \vec{v} \times \vec{\nabla} \varphi .$$

(2P)

50) **Varianten des Stokesschen Satzes**

Es sei $\vec{v}(\vec{r})$ ein differenzierbares Vektorfeld und $\varphi(\vec{r})$ ein differenzierbares Skalarfeld. Weiterhin sei F ein reguläres Flächenstück mit Rand ∂F . Drücken Sie jedes der folgenden beiden Linienintegrale über ∂F durch ein Flächenintegral über F aus:

(i)

$$\oint_{\partial F} d\vec{r} \varphi$$

(ii)

$$\oint_{\partial F} d\vec{r} \times \vec{v}$$

(2P)

51) **Energietransport in einem Koaxialkabel**

Ein in z -Richtung orientiertes Koaxialkabel der Länge ℓ bestehe aus einem inneren zylindrischen Leiter mit Radius a und einem äußeren Leiter mit Radius b ; es sei an einem Ende an eine Batterie und am anderen Ende an einen Widerstand angeschlossen. Der innere Leiter trage die Ladung Q und führe einen Strom I , der äußere Leiter trägt daher die Ladung $-Q$ und führt den entgegengesetzten Strom $-I$.

a) Berechnen Sie das elektrische und das magnetische Feld zwischen den beiden Leitern. Randeffekte dürfen vernachlässigt werden.

b) Der Vektor

$$\vec{S}(\vec{r}) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})$$

gibt die *Energiestromdichte* des elektromagnetischen Feldes an, also die pro Fläche und Zeit in Richtung von \vec{S} fließende Energie. Berechnen Sie damit die gesamte im Kabel transportierte Leistung P . Zeigen Sie weiterhin, dass diese Leistung der Beziehung $P = UI$ gehorcht, wobei die Spannung

$$U = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} d\vec{r} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

wie üblich durch ein Linienintegral des elektrischen Feldes vom Innen- zum Außenleiter gegeben wird. (3P)

52) Zerlegung eines Vektorfeldes in ein Gradienten- und ein Wirbelfeld

Den Hintergrund dieser letzten Aufgabe liefert die folgende Frage: Die Maxwell-Gleichungen legen die Divergenz und die Rotation der beiden Felder $\vec{E}(\vec{r}, t)$ und $\vec{B}(\vec{r}, t)$ fest. Sind diese Felder damit eindeutig bestimmt?

Es sei $D(\vec{r})$ ein stetiges Skalarfeld und $\vec{C}(\vec{r})$ ein differenzierbares Vektorfeld mit der Eigenschaft $\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = 0$. Betrachten Sie die Felder

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{D(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{W}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{C}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

sowie die daraus konstruierte Summe

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) + \vec{\nabla} \times \vec{W}(\vec{r}) .$$

a) Unter welcher Voraussetzung an $D(\vec{r})$ und $\vec{C}(\vec{r})$ existieren die Integrale $U(\vec{r})$ und $\vec{W}(\vec{r})$?

b) Zeigen Sie, dass dann $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = D(\vec{r})$ und $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{C}(\vec{r})$.

Hinweis: Benutzen Sie die bekannte Beziehung

$$\Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') .$$

c) Sofern also ein Skalarfeld $D(\vec{r})$ und ein quellenfreies Vektorfeld $\vec{C}(\vec{r})$ vorgegeben sind *und* beide die Voraussetzung aus a) erfüllen, kann explizit ein Feld $\vec{F}(\vec{r})$ konstruiert werden, das $D(\vec{r})$ als Divergenz und $\vec{C}(\vec{r})$ als Rotation besitzt; dieses Feld $\vec{F}(\vec{r})$ kann zudem als Summe eines Gradienten- und eines Wirbelfeldes dargestellt werden. Ist diese Zerlegung sogar *eindeutig*? (3P)