

Übungen zur Vorlesung *Einführung in die Theoretische Physik*

(SoSe 2015, Übungsblatt 10)

<http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingITP/ITP.html>

Abgabe: Dienstag, 23. Juni bis 12:00 Uhr

37) Das Levi-Civita-Symbol

Der *total antisymmetrische Tensor dritter Stufe*, der nach dem italienischen Mathematiker Tullio Levi-Civita (1873-1941) auch als *Levi-Civita-Symbol* bezeichnet wird, ist definiert durch

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{wenn } (i, j, k) \text{ eine gerade Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist;} \\ -1, & \text{wenn } (i, j, k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist;} \\ 0, & \text{wenn mindestens zwei Indizes gleich sind.} \end{cases}$$

Mit Hilfe dieses Tensors können viele Umformungen, die Kreuzprodukte von Vektoren enthalten, sehr kompakt geschrieben werden.

a) Zeigen Sie, dass

$$\varepsilon_{ijk} v_j w_k = (\vec{v} \times \vec{w})_i,$$

d.h. dass die linke Seite dieser Gleichung mit der i -ten Komponente des Kreuzproduktes $\vec{v} \times \vec{w}$ übereinstimmt. (Summenkonvention!)

b) Beweisen Sie die wichtige Beziehung

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl},$$

wobei δ_{ij} das bekannte Kronecker-Symbol ist.

c) Folgern Sie, dass ein zweimal differenzierbares Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$ der Identität

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \Delta \vec{v}$$

gehört, wobei $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ den Laplace-Operator bezeichnet. (2P)

38) Einiges zu Gaußintegralen

a) Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2},$$

indem Sie das Quadrat I^2 dieses Integrals in ebenen Polarkoordinaten auswerten.

b) Berechnen Sie für reelles $\alpha > 0$ die Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 e^{-\alpha x^2} \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^4 e^{-\alpha x^2}.$$

c) Betrachten Sie die Funktionenfolge

$$\delta_n(x - x_0) = N_n e^{-n(x-x_0)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Bestimmen Sie die Normierungsfaktoren N_n derart, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta_n(x - x_0) = 1$$

und ermitteln Sie dann den Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta_n(x - x_0) f(x)$$

für eine beliebige, glatte und integrierbare „Testfunktion“ f . (3P)

39) Volumenintegrale: Zur Reihung der Integrationen

Gegeben ist das skalare Feld $\varphi(x, y, z) = xyz$. Berechnen Sie das Volumenintegral dieses Feldes über das Volumen V , das im ersten Oktanten unter der Ebene $2x + 2y + z = 6$ liegt. Dabei soll dieses Integral in kartesischen Koordinaten mit Hilfe der beiden Integrationsreihenfolgen

$$\int dz \int dy \int dx \dots \quad \text{und} \quad \int dx \int dz \int dy \dots$$

ausgewertet werden. (3P)

40) Der Gradient in krummlinig-orthogonalen Koordinatensystemen

Ein Punkt im Raum werde durch drei Koordinaten u, v, w spezifiziert; etwa in sphärischen Polarkoordinaten durch $u = r, v = \vartheta$ und $w = \varphi$. Dieses „krummlinige“ Koordinatensystem soll *orthogonal* sein, so dass die drei Einheitsvektoren \vec{e}_u, \vec{e}_v und \vec{e}_w , die in jedem Raumpunkt in Richtung der zugehörigen Koordinatenlinie zeigen, senkrecht aufeinander stehen. Eine infinitesimale Verschiebung $d\vec{r}$ von (u, v, w) nach $(u + du, v + dv, w + dw)$ besitzt dann die Form

$$d\vec{r} = f du \vec{e}_u + g dv \vec{e}_v + h dw \vec{e}_w$$

mit spezifischen Funktionen $f = f(u, v, w), g = g(u, v, w)$ und $h = h(u, v, w)$.

a) Zeigen Sie, dass der Gradient $\vec{\nabla} F$ einer Funktion $F(u, v, w)$ die Form

$$\vec{\nabla} F = \vec{e}_u \frac{1}{f} \frac{\partial F}{\partial u} + \vec{e}_v \frac{1}{g} \frac{\partial F}{\partial v} + \vec{e}_w \frac{1}{h} \frac{\partial F}{\partial w}$$

annimmt.

Hinweis: Die definierende Eigenschaft des Gradienten besteht darin, dass das Differential

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv + \frac{\partial F}{\partial w} dw$$

durch das Skalarprodukt $\vec{\nabla} F \cdot d\vec{r}$ gegeben wird.

b) Welche Gestalt besitzt daher $\vec{\nabla} F$ in sphärischen Polarkoordinaten? (2P)