Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 8. Juni 2015

Übungen zur Vorlesung *Einführung in die Theoretische Physik*

(SoSe 2015, Übungsblatt 9)

`http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingITP/ITP.html`

Abgabe: Dienstag, 16. Juni bis 12:00 Uhr

33) **Vorläufiges zu „div"**

Neben den bereits bekannten Operationen $\vec{\nabla} f = \mathrm{grad} f$ und $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \mathrm{rot}\, \vec{v}$ gibt es weiterhin die Möglichkeit, den Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ im Sinne des Skalarproduktes auf ein differenzierbares Vektorfeld anzuwenden; man nennt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z = \mathrm{div}\, \vec{v}$$

die *Divergenz* des Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r})$.

a) Zeigen Sie für zweimal differenzierbare Vektorfelder $\vec{v}(\vec{r})$, dass

$$\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\, \vec{v} = 0 \ .$$

b) Beweisen Sie die Produktregel

$$\mathrm{div}(\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{w} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{v} - \vec{v} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{w} \ .$$

(2P)

34) **Der Runge-Lenz-Vektor**

Zeigen Sie, dass der Runge-Lenz-Vektor

$$\vec{\Lambda} = \frac{\vec{p} \times \vec{L}}{Gm^2M} - \frac{\vec{r}}{r}$$

für die gebundene Bewegung eines Teilchens der Masse m im Gravitationspotential

$$V_0(r) = -\frac{GmM}{r}$$

eine Erhaltungsgröße ist, dass also $\dot{\vec{\Lambda}} = \vec{0}$ gilt. Bestimmen Sie weiterhin die Richtung von $\vec{\Lambda}$ und zeigen Sie, dass der Betrag Λ dieses Vektors mit der Exzentrizität ε der Bahnellipse übereinstimmt. **(2P)**

35) **Sturz in das Kraftzentrum**

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einen Zentralpotential der Form

$$V(r) = -\frac{c}{r^\alpha} \qquad ; \qquad \alpha > 0 \ .$$

Unter welchen Bedingungen stürzt das Teilchen in das Kraftzentrum? Ist dabei die Zahl der Umläufe endlich oder unendlich? Weisen Sie nach, dass die für den Sturz in das Zentrum benötigte Zeit stets endlich ist, während die Geschwindigkeit und die Winkelgeschwindigkeit des Teilchens divergieren. **(3P)**

36) **Periheldrehung**

Die Bahnkurven eines Teilchens der Masse m, das sich in einem „reinen" Gravitationspotential $V_0(r)$ bewegt, sind Ellipsen mit raumfesten Halbachsen. Wenn jedoch ein „kleines" Zusatzpotential $\delta V(r)$ als Störung auftritt, wandert der Punkt, an dem die Masse dem Kraftzentrum am nächsten ist, mit jeder Radialoszillation ein Stück weiter. Dieser Effekt wird als „Periheldrehung" bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass der Azimutalwinkel φ bei der gebundenen Bewegung in einem beliebigen Zentralpotential während einer vollen Oszillation der Radialkoordinate $r(t)$ vom inneren Umkehrpunkt r_{min} zum äußeren Umkehrpunkt r_{max} und zurück nach r_{min} den Winkel

$$\Delta\varphi = -2\frac{\partial}{\partial L}\int_{r_{\mathrm{min}}}^{r_{\mathrm{max}}} \mathrm{d}r \sqrt{2m\Big(E - V(r)\Big) - \frac{L^2}{r^2}}$$

überstreicht. Setzen Sie darin $V(r) = V_0(r) + \delta V(r)$, wobei $V_0(r)$ das ungestörte Gravitationspotential und $\delta V(r)$ die Störung bezeichnet. Zeigen Sie dann durch Entwicklung des exakten Ausdrucks, dass der bei einer vollen Oszillation der Radialkoordinate auftretende Winkel $\delta\varphi$ der Periheldrehung in erster Ordnung von $\delta V(r)$ durch

$$\delta\varphi = 2m\frac{\partial}{\partial L}\frac{1}{L}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi\, \delta V(r(\varphi))\, r^2(\varphi)$$

gegeben wird.

b) Berechnen Sie den Winkel $\delta\varphi$ für die folgenden beiden Störungen:

(i)

$$\delta V(r) = \frac{c}{r^2}$$

(ii)

$$\delta V(r) = \frac{d}{r^3}$$

Hinweis: In erster Ordnung von $\delta V(r)$ können die auftretenden Integrationen längs der *ungestörten* Bahn durchgeführt werden. **(3P)**