Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 1. Juni 2015

Übungen zur Vorlesung *Einführung in die Theoretische Physik*

(SoSe 2015, Übungsblatt 8)

`http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingITP/ITP.html`

Abgabe: Dienstag, 9. Juni bis 12:00 Uhr

29) **Zum Umgang mit „rot“ und „grad“**

Es sei $f(\vec{r})$ ein differenzierbares skalares Feld und $\vec{v}(\vec{r})$ ein differenzierbares Vektorfeld. Beweisen Sie die folgende Produktregel:

$$\mathrm{rot}(f\vec{v}) = f\,\mathrm{rot}\,\vec{v} + \mathrm{grad}f \times \vec{v} \; .$$

(1P)

30) **Abbremsung durch eine verallgemeinerte Reibungskraft**

Die Abbremsung eines Körpers der Masse m, der sich längs der x-Achse in einem viskosen Medium bewegt, soll durch die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x}^n$$

beschrieben werden. Dabei bestimmt der reelle Exponent $n \geq 0$ die Dimension des Reibungskoeffizienten γ. Da der Fall der Stokes'schen Reibung ($n = 1$) bereits aus Aufgabe 28 bekannt ist, braucht er hier nicht mehr betrachtet zu werden.

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $v(t)$ sowie die Weg-Zeit-Funktion $x(t)$ für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, und diskutieren Sie die Abbremsung in Abhängigkeit vom Exponenten n: In welchen Fällen kommt der Körper zur Ruhe, in welchen nicht? Wie groß ist jeweils seine Reichweite? Was geschieht insbesondere im Fall Newtonscher Reibung (d.h. für $n = 2$) ? **(2P)**

31) **Schwingungsdauer des mathematischen Pendels**

Unter einem „mathematischen Pendel“ versteht man eine Punktmasse m, die an einem masselosen Faden der Länge ℓ aufgehängt ist und in einem homogenen Gravitationsfeld ebene Schwingungen ausführt.

a) Leiten Sie die Bewegungsgleichung des Pendels her:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0 \; ,$$

wobei φ den Auslenkungswinkel des Fadens gegen die Lotrichtung und g die lokale Gravitationsbeschleunigung angibt.

b) Folgern Sie daraus nach bekanntem Muster, dass für eine Schwingung mit maximalem Auslenkungswinkel $\varphi_{\max}$ die Schwingungsdauer T durch

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_{\max}}}$$

gegeben wird.

c) Zeigen Sie weiter, dass man aus b) durch die Substitution

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi_{\max}}{2}\sin\vartheta$$

den äquivalenten Ausdruck

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\vartheta}}$$

erhält, wobei

$$k^2 = \sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2}$$

gesetzt wurde. (Das hier auftauchende Integral ist bekannt als „vollständiges elliptisches Integral erster Gattung“.)

d) Entwickeln Sie die Periodendauer T des mathematischen Pendels bis zu Termen der Ordnung $\mathcal{O}(k^{10})$ einschließlich! **(4P)**

32) **Bewegung im isotropen Oszillatorpotential**

Ein Punktteilchen der Masse m bewege sich in einem dreidimensionalen isotropen harmonischen Potential:

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \ .$$

Beschreiben Sie seine Bahnkurve, d.h. berechnen Sie die zeitabhängige radiale Abstandsfunktion $r(t)$ sowie die Winkelfunktion $\varphi(r)$ in der Bahnebene. Zeigen Sie insbesondere, dass die Bahn in sich geschlossen ist! **(3P)**