

Übungen zur Vorlesung *Einführung in die Theoretische Physik*

(SoSe 2015, Übungsblatt 6)

<http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingITP/ITP.html>

Abgabe: Dienstag, 26. Mai bis 12:00 Uhr

21) Vertauschbarkeit partieller Ableitungen

a) Berechnen Sie die Ausdrücke

$$\frac{\partial F}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)$$

für die folgenden Funktionen $F(x, y)$:

(i)

$$F(x, y) = \sin(xy) + 2x^3y^4$$

(ii)

$$F(x, y) = x^2y^4e^{x^4y^2}$$

b) Unter dem *Gradienten* einer differenzierbaren Funktion $F(\vec{r})$ versteht man das Vektorfeld

$$\text{grad } F = \vec{\nabla} F = \begin{pmatrix} \partial_x F \\ \partial_y F \\ \partial_z F \end{pmatrix} ,$$

wobei $\partial_x F = \partial F / \partial x$, usw. Unter der *Rotation* eines dreidimensionalen, differenzierbaren Vektorfeldes $\vec{v}(\vec{r})$ mit den Komponenten v_x, v_y, v_z versteht man das Vektorfeld

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \partial_y v_z - \partial_z v_y \\ \partial_z v_x - \partial_x v_z \\ \partial_x v_y - \partial_y v_x \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, dass differenzierbare Gradientenfelder wirbelfrei sind, d.h. dass die Rotation eines differenzierbaren Vektorfeldes, das seinerseits als Gradient einer Funktion $F(\vec{r})$ darstellbar ist, stets verschwindet. **(2P)**

22) Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen in drei Raumdimensionen

Beweisen Sie die folgenden Aussagen, die für *zwei*dimensionale Vektorfelder bereits aus der Vorlesung bekannt sind, auch für *drei*dimensionale Felder!

a) Kurvenintegrale über ein Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r})$ sind genau dann nur vom Anfangs- und Endpunkt eines Weges \mathcal{C} , nicht aber von dessen Verlauf abhängig, wenn \vec{v} ein Gradientenfeld ist, wenn also eine Funktion $F(\vec{r})$ existiert mit der Eigenschaft $\vec{\nabla} F = \vec{v}$.

b) Wirbelfreie Felder, also Vektorfelder $\vec{v}(\vec{r})$ mit der Eigenschaft $\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0}$, sind Gradientenfelder, sofern ihr Definitionsbereich einfach zusammenhängend ist. **(4P)**

23) Kurvenintegrale über Gradientenfelder

a) Berechnen Sie den Ausdruck $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{v}(\vec{r})$ für

$$\vec{v}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 \\ 3xz^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

b) Eine sehr große Masse M befinde sich im Ursprung des Koordinatensystems. Auf eine zweite Masse m am Ort \vec{r} wirkt also die Gravitationskraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = -GMm \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Die Arbeit $W = -\int_{\mathcal{C}} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$ ist zu verrichten, um die Masse m längs eines Weges \mathcal{C} gegen das Feld von \vec{r}_1 nach \vec{r}_2 zu bringen. Erklären Sie, warum W nur von den Abständen $r_1 = |\vec{r}_1|$ und $r_2 = |\vec{r}_2|$ dieser beiden Punkte vom Kraftzentrum abhängt! **(2P)**

24) Clairaut-Differentialgleichung und Legendre-Transformation

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Clairaut-Differentialgleichungen in expliziter Form und fertigen Sie Skizzen ihrer Graphen an!

(i)

$$y = xy' - \frac{1}{2}y'^2$$

(ii)

$$y = xy' - \sqrt{y'^2 - 1}$$

b) Berechnen Sie die Legendre-Transformierten der folgenden Funktionen:

(i)

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2$$

(ii)

$$y(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

(2P)