Universität Oldenburg
Institut für Physik

Oldenburg, den 11. Mai 2015

Übungen zur Vorlesung *Einführung in die Theoretische Physik*

(SoSe 2015, Übungsblatt 5)

`http://www.condmat.uni-oldenburg.de/TeachingITP/ITP.html`

Abgabe: Dienstag, 19. Mai bis 12:00 Uhr

17) **Die Riccati-Differentialgleichung**

Lösungen der nach dem italienischen Mathematiker Jacopo Francesco Riccati (1676 - 1754) benannten nichtlinearen Differentialgleichung

$$y' + g(x)y + h(x)y^2 = k(x) \ ,$$

wobei die Funktionen g, h, k als stetig vorausgesetzt werden, lassen sich nicht in geschlossener Form angeben, von Sonderfällen abgesehen. Kennt man jedoch eine Lösung, so sind die übrigen explizit berechenbar.

a) Zeigen Sie, dass die Differenz $u(x) = y(x) - \varphi(x)$ zweier Lösungen $y(x)$, $\varphi(x)$ der Riccati-Differentialgleichung einer Bernoulli-Differentialgleichung gehorcht:

$$u' + [g(x) + 2\varphi(x)h(x)]u + h(x)u^2 = 0 \ .$$

b) Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$y' + \left(\frac{3}{x} - 1\right) y + x^2y^2 = \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{4x^2} \ .$$

Zeigen Sie, dass

$$\varphi(x) = \frac{1}{2x^2}$$

eine Lösung dieser Gleichung ist und berechnen Sie dann diejenige Lösung, die die Anfangsbedingung $y(1) = 1$ erfüllt. **(2P)**

18) **Exakte Differentiale**

Welches der folgenden Differentiale $g(x, y)\,\mathrm{d}x + h(x, y)\,\mathrm{d}y$ ist exakt? Wie lautet ggf. die zugehörige Stammfunktion?

a)

$$g(x, y) = 2xy^3 + 3x^2y^2 \quad , \quad h(x, y) = 2x^3y + 3x^2y^2$$

b)

$$g(x, y) = \cos(x + y)\ln(x + y) + \frac{\sin(x + y)}{x + y} \quad , \quad h(x, y) = g(x, y)$$

c)

$$g(x,y) = \mathrm{e}^{(x+y)^2} + 2(x^2 + x^2 y)\mathrm{e}^{(x+y)^2} \quad , \quad h(x,y) = 2(x^2 + xy)\mathrm{e}^{(x+y)^2}$$

d)

$$g(x,y) = \mathrm{e}^{x^2 y} + 2x^2 y \mathrm{e}^{x^2 y} \quad , \quad h(x,y) = x^3 \mathrm{e}^{x^2 y} + 2y$$

(4P)

19) **Der Eulersche Multiplikator**

Es sei $g(x,y)\,\mathrm{d}x + h(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ eine *nicht* exakte Differentialgleichung, wobei die Funktionen g, h stetig differenzierbar sein sollen. Eine stetig differenzierbare Funktion $M(x,y)$ heißt *Eulerscher Multiplikator* (oder auch *integrierender Faktor*) dieser Differentialgleichung, wenn

$$M(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x + M(x,y)h(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

exakt ist.

a) In manchen Fällen lässt sich ein solcher Multiplikator finden, der nur von einer der beiden Variablen abhängt. Zeigen Sie, dass der Ansatz $M = M(x)$ auf die Gleichung

$$\frac{\partial_y g - \partial_x h}{h} = \frac{M'}{M} = (\ln M)'$$

führt. Wann ist diese Gleichung erfüllbar? Dabei ist $\partial_y g = \frac{\partial g}{\partial y}$ und $\partial_x h = \frac{\partial h}{\partial x}$.

b) Bestimmen sie Multiplikatoren $M(x)$ für

$$y\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y = 0$$

und

$$(2x^2 + 2xy^2 + 1)y\,\mathrm{d}x + (3y^2 + x)\,\mathrm{d}y = 0\ .$$

Wie lauten die zugehörigen Stammfunktionen? **(2P)**

20) **Zur Berechnung von Linienintegralen**

Berechnen Sie die Linienintegrale $\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{v}(\vec{r})$ für die folgenden zweidimensionalen Vektorfelder $\vec{v}(\vec{r}) = (g(x,y), h(x,y))$ und die angegebenen Wege!

a)

$$g(x,y) = 12x^2y^2 \quad , \quad h(x,y) = 8x^3 y$$

Der Weg $\mathcal{C}$ führe von $\vec{r}_1 = (0,0)$ nach $\vec{r}_2 = (1,4)$; einmal auf gerader Linie, einmal parallel zu den Koordinatenachsen.

b)

$$g(x,y) = xy \quad , \quad h(x,y) = x^2$$

Der Weg $\mathcal{C}$ führe von $\vec{r}_1 = (1,1)$ nach $\vec{r}_2 = (2,2)$; einmal auf gerader Linie, einmal parallel zu den Koordinatenachsen. **(2P)**